

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ФВТ



Фионова Л.Р.

« 29 » Июня 2016 г.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

### М1.2.7.1 ФРАКТАЛЫ

Направление подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

Магистерская программа «Математическое моделирование в экономике и

Квалификация (степень) выпускника – *магистр*

Форма обучения очная

Пенза, 2016

## Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Фракталы» являются

- формирование у студентов представлений о теории фракталов, как одной из современных математических дисциплин, имеющей свой предмет, задачи и методы.
- формирование у студентов знаний и умений, необходимых для освоения и использования методов фрактальной геометрии при решении теоретических и прикладных задач.

## 2. Место дисциплины в структуре ОПОП магистратуры

Дисциплина «Фракталы» в учебном плане находится в вариативной части («Дисциплинах по выбору №1»), и является одной из дисциплин, формирующих профессиональные знания и навыки, характерные для магистра по направлению подготовки «Прикладная математика и информатика».

Изучение дисциплины базируется на знаниях студентами следующих курсов учебного плана бакалавриата по направлению 01.03.04 «Прикладная математика».

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин: «Непрерывные и дискретные математические модели», «Непрерывные и дискретные математические модели», «Динамические системы», «Математические модели физики», «Математическая статистика», «Интегральные уравнения», «Вариационное исчисление и вариационные методы», «Численные методы и методика их преподавания», «Выпуклый анализ и методы оптимизации», «Практика по получению профессиональных умений и опыта профессиональной деятельности», «Педагогическая практика», «Научно-исследовательская работа», «Преддипломная практика».

Освоение теории фракталов в комплексе с другими дисциплинами призвано сформировать базу знаний в области применения методов и инструментария компьютерного моделирования в профессиональной сфере деятельности; приобретенные знания также могут помочь в научно-исследовательской работе.

## 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «Фракталы»

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению:

Коды Компетен- ции	Наименование компетенции	Структурные элементы компетенции (в результате освоения дисциплины обучающийся должен знать, уметь, владеть)
1	2	3
		<p><b>Знать:</b> основные понятия теории фракталов, определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений, в том числе в компьютерном моделировании объектов и явлений.</p> <p><b>Уметь:</b> применять методы фрактальной геометрии при математическом моделировании..</p> <p><b>Владеть:</b> математическим аппаратом фрактальной геометрии.</p>
		<p><b>Знать:</b> основные методы анализа</p> <p><b>Уметь:</b> решать задачи вычислительного и теоретического характера в области теории фракталов, устанавливать взаимодействие между понятиями, доказывать утверждения</p> <p><b>Владеть:</b> методами решения различных задач теории фракталов.</p>
		<p><b>Знать:</b> Способен дать собственную критическую оценку изучаемого материала</p> <p><b>Уметь:</b> устанавливать контакт с информантом.</p> <p><b>Владеть:</b> основными навыками работы с источниками</p>

#### 4. Структура и содержание дисциплины «Фракталы»

##### 4.1. Структура дисциплины «Фракталы»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы, 144 часа.

№ п/п	Наименование разделов и тем дисциплины (модуля)	Семестр	Недели семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)									Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра)						
				Аудиторная работа				Самостоятельная работа											
				Всего	Лекция	Практические занятия	Лабораторные занятия	Всего	Подготовка к аудиторным занятиям	Реферат, эссе и др.	Курсовая работа (проект)	Подготовка к экзамену	Собеседование по лабораторным работам	Коллоквиум	Привлечение тестов	Проверка контрольн. Работ	Проверка реферата	Проверка эссе и иных творческих работ	курсовая работа (проект)
1	Раздел 1. Фракталы и системы счисления. Классические фракталы и методы их построения	1	1-4	12	4	4	4	18	8	4		6				8			2-5
1.1	Что такое фракталы? Самоподобие. L-системы. Пыль Кантора. Кривые Пеано. Древоидная структура и системы счисления. Решето Серпинского. Фрактал Кантора. Кривая Пеано и ее построение. Построение снежинки Коха. Построение снежинки ковра Серпинского.		1-2		2	2	2	7	4			3							2-3

1.2	Построение множества «пыль Кантора». Применение L – систем для построения фракталов		<b>3-4</b>		<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>7</b>	<b>4</b>			<b>3</b>	3						4-5
2	Раздел 2. Множества и отображения	1	5-6	<b>6</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	12	4	2		6				8			6-7
2.1	Счетные множества. Множества мощности континуума. Кольца и алгебры множеств. Точечные множества в евклидовом пространстве. Предельные точки. Замкнутые и открытые множества.		5-6		<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	12	4	2		6							6
3	Раздел 3. Системы итерированных функций	<b>1</b>	<b>7-10</b>	<b>12</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>18</b>	<b>8</b>	<b>4</b>		<b>6</b>				8			7-11
3.1	Понятие итерированных функций Системы итерированных функций (СИФ).		<b>7-8</b>		<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>9</b>	<b>4</b>	<b>2</b>		<b>3</b>	7						8-9
3.2	Реализация СИФ. СИФ со сгущением. Коллажи		<b>9-10</b>		<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>9</b>	<b>4</b>	<b>2</b>		<b>3</b>							10-11
4	Раздел 4. Хаос и фракталы. Проблема Кэли	1	11-12	<b>6</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	12	4	2		6				8			12-13
4.1	Существенная зависимость. Символическая динамика. Множество Мандельброта. Хаос и множества Жюлиа.				<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	12	4	2		6	11						12-13
5	Раздел 5. Случайные фракталы. Применение фракталов при моделировании физических процессов	1	<b>13-16</b>	<b>12</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>18</b>	<b>8</b>	<b>4</b>		<b>6</b>				15			14-17
5.1	Случайные фракталы. Случайные возмущения. Броуновское движение.				<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>9</b>	<b>4</b>	<b>2</b>		<b>3</b>							14-16

	Срединное смещение. Фрактальное броуновское движение. Срединное смещение и ФБД																		
5.2	Фурье-анализ фрактального броуновского движения. Фильтрация Фурье. Моделирование растений и кровеносной системы. Моделирование турбулентного движения. Моделирование сложных графических объектов. Моделирование процессов разрушения. Моделирование финансовых задач.				2	2	2	9	4	2		3	15						16-17
6	Раздел 6. Теория размерности.	1	17-18	6	2	2	2	12	4	2		6					18		18
6.1	Хаусдорфова мера. Хаусдорфова размерность. Вычисление хаусдорфовой размерности. Предельная емкость. Фрактальная размерность. Инвариантная мера. Поточечная размерность				2	2	2	12	4	2		6							18
													Промежуточная аттестация						
													Форма		Семестр				
													Зачет		-				
													Экзамен		1				

## 4.2. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	Фракталы и системы счисления. Классические фракталы и методы их построения	Что такое фракталы? Самоподобие. L-системы. Пыль Кантора. Кривые Пеано. Древо-видная структура и системы счисления. Решето Серпинского. Фрактал Кантора. Кривая Пеано и ее построение. Построение снежинки Коха. Построение снежинки ковра Серпинского. Построение множества «пыль Кантора». Применение L – систем для построения фракталов
2.	Множества и отображения	Счетные множества. Множества мощности континуума. Кольца и алгебры множеств. Точечные множества в евклидовом пространстве. Предельные точки. Замкнутые и открытые множества. Сжимающие отображения. Аффинные преобразования. Метрика Хаусдорфа.
3.	Системы итерированных функций	Понятие итерированных функций Системы итерированных функций (СИФ). Реализация СИФ. СИФ со сгущением. Коллажи
4	Хаос и фракталы. Проблема Кэли	Существенная зависимость. Символическая динамика. Хаос и фракталы. Множество Мандельброта. Хаос и множества Жюлиа. Проблема Кэли.
5	Случайные фракталы. Применение фракталов при моделировании физических процессов	Случайные фракталы. Случайные возмущения. Броуновское движение. Срединное смещение. Фрактальное броуновское движение. Срединное смещение и ФБД . Фурье-анализ фрактального броуновского движения. Фильтрация Фурье. Моделирование растений и кровеносной системы. Моделирование турбулентного движения. Моделирование сложных графических объектов. Моделирование процессов разрушения. Моделирование финансовых задач.
6	Теория размерности.	Хаусдорфова мера. Хаусдорфова размерность. Вычисление хаусдорфовой размерности. Предельная емкость. Фрактальная размерность. Инвариантная мера. Поточечная размерность.

## 5. Образовательные технологии

В процессе изучения дисциплины «Фракталы» предполагается использовать структурно-логические и интеграционные образовательные технологии, реализуемые посредством:

- лекций в виде вводных, текущих, обзорных и заключительно-обобщающих занятий;

- практических занятий с использованием методов «многократного повторения» (темы 1, 2, 4); по логике мышления – индуктивные, дедуктивные и репродуктивные.

- организации самостоятельной работы на основе личностно-дифференцированного подхода планирования задания в виде воспроизводящей и частично-поисковой работ.

- организации текущего контроля знаний студентов методами: выполнения домашних заданий, оценки активности на практических занятиях и рейтинговой системы общей оценки знаний студентов.

Занятия, проводимые в интерактивных формах, с использованием интерактивных технологий составляют 30% занятий.

В целях реализации индивидуального подхода к обучению студентов, осуществляющих учебный процесс по собственной траектории в рамках индивидуального рабочего плана, изучение данной дисциплины базируется на следующих возможностях: обеспечение внеаудиторной работы со студентами в том числе в электронной образовательной среде с использованием соответствующего программного оборудования, дистанционных форм обучения, возможностей интернет-ресурсов, индивидуальных консультаций и т.д.

## 6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

**Оценочные средства для текущего контроля успеваемости,**

**промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

### 6.1. План самостоятельной работы студентов

№ нед.	Тема	Вид самостоятельной работы	Задание	Рекомендуемая литература	Количество часов
1-2	Фракталы и системы счисления	Подготовка к лабораторной работе «Знакомство с методами построения фракталов».	- проанализировать полученное задание, выделить информационные объекты и действия;	Кроновер, Ричард М. Фракталы и хаос в динамических системах. С. 9-52	4



		Изучение теоретического материала.	- разработать программу с использованием требуемых операций для построения выбранного фрактала (по заданию).		
3-4	Классические фракталы и методы их построения	Подготовка к лабораторной работе «Знакомство с методами построения фракталов».	- проанализировать полученное задание, выделить информационные объекты и действия	Мойко, Н.В. Фракталы. Построение и исследование. Н.В. Мойко, О.В. Болотникова, Н.Ю. Кудряшова С.71	4
5-6	Счетные множества. Множества мощности континуума. Кольца и алгебры множеств. Точечные множества в евклидовом пространстве. Предельные точки. Замкнутые и открытые множества. Сжимающие отображения. Аффинные преобразования. Метрика Хаусдорфа.	Изучение теоретического материала. Подготовка к выполнению лабораторной работы «Моделирование геометрических фракталов».	Рассмотреть основные понятия теории фракталов и построить основные типы фракталов (треугольник Серпинского, кривую Коха, снежинку Коха).  Построить геометрические фракталы	Мойко, Н.В. Фракталы. Построение и исследование. Н.В. Мойко, О.В. Болотникова, Н.Ю. Кудряшова. С.76  Кроновер, Ричард М. Фракталы и хаос в динамических системах. С.53-92  Мойко, Н.В. Фракталы. Построение и исследование. Н.В. Мойко, О.В. Болотникова, Н.Ю. Кудряшова. С.76	4
7-8	Понятие итерированных функций Системы итерированных функций (СИФ).	Подготовка к лабораторной работе «Моделирования алгебраических фракталов».	Рассмотреть основные понятия теории фракталов и построить основные типы фракталов (множества Жюлиа и Бассейны Ньютона).	Мойко, Н.В. Фракталы. Построение и исследование. Н.В. Мойко, О.В. Болотникова, Н.Ю. Кудряшова С.78	4
9-10	Реализация СИФ. СИФ со сгущением. Коллажи	Изучение теоретического материала	Изучить теоретический материал по указанной теме	Кроновер, Ричард М. Фракталы и хаос в динамических системах. С.96-126	4
11-12	Хаос и фракталы. Проблема Кэли	Изучение теоретического материала.	Изучить указанный теоретический материал	Кроновер, Ричард М. Фракталы и хаос в динамических системах. С.147-253	4
13-14	Случайные фракталы. Случайные возмущения. Броуновское движение.	Подготовка к лабораторной работе « Моделирования	Изучить броуновское движение и	Мойко, Н.В. Фракталы. Построение и исследование. Н.В. Мойко, О.В.	4

	Срединное смещение. Фрактальное броуновское движение. Срединное смещение и ФБД	фрактального броуновского движения».	построить фрактальное броуновское движение.	Болотникова, Н.Ю. Кудряшова С.79	
15-16	Фурье-анализ фрактального броуновского движения. Фильтрация Фурье. Моделирование растений и кровеносной системы. Моделирование турбулентного движения.	Изучение теоретического материала.	Изучить материал по указанным темам	Кроновер, Ричард М. Фракталы и хаос в динамических системах. С.253-289	4
17-18	Теория размерности.	Изучение теоретического материала.	Изучить материал по указанной теме	Кроновер, Ричард М. Фракталы и хаос в динамических системах. С.315-320	4
1-18	Все темы	Подготовка рефератов	Изучить материал по указанным темам	Кроновер, Ричард М. Фракталы и хаос в динамических системах.	18
1-18	Все темы	Подготовка к экзамену	Изучить материал по указанным темам	Кроновер, Ричард М. Фракталы и хаос в динамических системах. Мойко, Н.В. Фракталы. Построение и исследование. Н.В. Мойко, О.В. Болотникова, Н.Ю. Кудряшова	36

## 6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

- **Подготовка к аудиторным занятиям** проводится посредством изучения курса лекций, дополнительной литературы, а также решения предложенных задач.
- **Подготовка к зачету** – изучение курса лекций, упражнения в решении типовых задач, изучение дополнительной литературы.

## 6.3. Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов

### Контроль освоения компетенций

№ п\п	Вид контроля	Контролируемые темы (разделы)	Компетенции, компоненты которых контролируются
1	Лабораторные работы	Разделы 1, 4, 5.	ОПК-4, ПСК-1, ПСК-2
2	Реферат	Разделы 1,3,4,5,6	ОПК-4, ПСК-1, ПСК-2

### ***Темы рефератов.***

1. Бенуа Мандельброт – создатель фрактальной геометрии природы.
2. Феликс Хаусдорф – великий тополог.
3. Алгебраические фракталы.
4. Геометрические фракталы.
5. Стохастические фракталы.
6. Применение фракталов в технике.
7. Применение фракталов в архитектуре.
8. Применение фракталов в ювелирном деле.
9. Применение фракталов в экономике.

### ***Темы лабораторных работ***

1. Знакомство с методами построения фракталов
2. Моделирование геометрических фракталов
3. Моделирования алгебраических фракталов
4. Моделирования фрактального броуновского движения.

### **Собеседование №1**

#### **Лабораторная работа «Знакомство с методами построения фракталов»**

1. Классификация фракталов.
2. Геометрические фракталы.
3. Определение размерности геометрических фракталов. Построение фрактала по размерности.
4. L-системы. Построение с помощью одного правила.
5. L-системы. Построение с помощью двух правил.

### **Собеседование №2**

#### **Лабораторная работа « Моделирование геометрических фракталов».**

1. Классификация фракталов.
2. Геометрические фракталы.
3. Построение геометрических фракталов.

### **Собеседование №3**

#### **Лабораторная работа « Моделирование алгебраических фракталов».**

4. Классификация фракталов.
5. Алгебраические фракталы.
6. Построение алгебраических фракталов.

### **Собеседование №4**

#### **Лабораторная работа «Моделирование фрактального броуновского движения».**

1. Дать расширенное определение определению множеству Мандельброта
2. Написать рекурсию для построения данного множества
3. Рассказать алгоритм построения множества

### ***Вопросы к экзамену***

1. Классические фракталы. Самоподобие. L-системы. Пыль Кантора. Кривые Пеано.
2. Множества и отображения
3. Метрика Хаусдорфа I . Хаусдорфова мера. Хаусдорфова размерность.
4. Системы итерированных функций. Реализация СИФ. СИФ со сгущением.
5. Размерность Минковского . Вычисление размерности
6. Аттрактор Лоренца. Итерированные отображения.
7. Случайные возмущения . Броуновское движение. Срединное смещение
8. Фрактальное броуновское движение
9. Непрерывные отображения. Метрика Хаусдорфа II. Топологическая размерность
10. Размерность Хаусдорфа. Быстрое преобразование Фурье. Теория ренормализации и фракталы Пуанкаре
11. Общая схема построения конструктивных фракталов.
12. Инвариантные преобразования.
13. Хаос и фракталы. Хаос и множества Жюлиа
14. Множества Жюлиа и Фату. Фракталы Жюлиа. Фрактал Мандельброта. Фракталы Ньютона.
15. Счетные множества. Множества мощности континуума.
16. Кольца и алгебры множеств.
17. Точечные множества в евклидовом пространстве. Предельные точки.
18. Жордановы кривые. Кривая Пеано. Ковер Серпинского.

## 7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины «Фракталы»

### 1. Основная литература

- 1.1. Кроновер, Ричард М. Фракталы и хаос в динамических системах. – М. Изд-во «Техносфера». – 2006. 488 с. (5 экз)

[http://kleopatra.pnzgu.ru/cgi-bin/irbis64r\\_91/cgiirbis\\_64.exe?P21DBN=KATL&I21DBN=KATL\\_PRINT&S21FMT=fullw\\_print&C21COM=F&Z21MFN=9710](http://kleopatra.pnzgu.ru/cgi-bin/irbis64r_91/cgiirbis_64.exe?P21DBN=KATL&I21DBN=KATL_PRINT&S21FMT=fullw_print&C21COM=F&Z21MFN=9710)

- 1.2. Мойко, Н.В. Фракталы. Построение и исследование. Н.В. Мойко, О.В. Болотникова, Н.Ю. Кудряшова.-Пенза: Изд-вл ПГУ, 2017.-100 с. (в печати)

### 2. Дополнительная литература

- 2.1. Шелухин, О.И. Самоподобие и фракталы. Телекоммуникационные приложения [Электронный ресурс] : учеб. пособие / О.И. Шелухин, А.В. Осин, С.М. Смольский. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2008. — 368 с. — Режим доступа:

<https://e.lanbook.com/book/2307>

- 2.2. Прекрасный мир науки : сборник / Ю. А. Данилов ; сост. А. Г. Шадтина, под общ. ред. В. И. Санюка, Д. И. Трубецкого. - М. : Прогресс-Традиция, 2008. - 384 с. : ил. - ISBN 5-89826-282-2 : б.ц

[http://kleopatra.pnzgu.ru/cgi-bin/irbis64r\\_91/cgiirbis\\_64.exe?P21DBN=KATL&I21DBN=KATL\\_PRINT&S21FMT=fullw\\_print&C21COM=F&Z21MFN=9275](http://kleopatra.pnzgu.ru/cgi-bin/irbis64r_91/cgiirbis_64.exe?P21DBN=KATL&I21DBN=KATL_PRINT&S21FMT=fullw_print&C21COM=F&Z21MFN=9275)

## **8. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Лекционные и практические занятия по дисциплине «Фракталы» проводятся в лекционных аудиториях университета. Требуется компьютерный класс.

Waterloo Maple Inc. Maple. Maple 2017: Universities or Equivalent Degree Granting Institutions ,

*Бессрочный договор № 047-17-44 от 25 декабря 2017 г.*

ПО «Microsoft Windows» (подписка DreamSpark/Microsoft Imagine Standard); регистрационный номер 00037FFEBA CF8FD7,

### **включает в себя:**

Microsoft Windows XP, Microsoft Windows 7, Microsoft Windows 8, Microsoft Windows 8.1, Microsoft Windows 10, Microsoft Windows Server 2008, Microsoft Windows Server 2010, Microsoft Windows Server 2012

Microsoft Office Visio 2003, Microsoft Office Visio 2007, Microsoft Office Visio 2010, Microsoft Office Access 2013, Microsoft Office Access 2016

Microsoft Office Access 2003, Microsoft Office Access 2007, Microsoft Office Access 2010, Microsoft Office Access 2012, Microsoft Office Access 2013, Microsoft Office Access 2016

Microsoft Visual Studio 2005, Microsoft Visual Studio 2008, Microsoft Visual Studio 2010, Microsoft Visual Studio 2012, Microsoft Visual Studio 2013, Microsoft Visual Studio 2016

*Договор № СД-130712001 от 12.07.2013 (подписка с 1 сентября 2013 г. до 31 августа 2017 г.)*

*Продление Microsoft Imagine Standard KDF-00031 (подписка с 1 сентября 2017 г. до 31 августа 2020 г.)*

Рабочая программа дисциплины «Фракталы» составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

Программу составила:

1. Мойко Н.В.  к.т.н., доцент

**Настоящая программа не может быть воспроизведена ни в какой форме без предварительного письменного разрешения кафедры-разработчика программы.**

Программа одобрена на заседании кафедры «Высшая и прикладная математика»

Протокол № 11.1 от «28» июня 2016 года

/ Зав. кафедрой  
д.ф.-м.н., профессор



Бойков И.В.

Программа согласована с заведующим выпускающей кафедрой «Высшая и прикладная математика»

Протокол № 11.1 от «28» июня 2016 года

/ Зав. кафедрой  
д.ф.-м.н., профессор



Бойков И.В.

Программа одобрена методической комиссией ФВТ

Протокол № 6<sup>а</sup> от «29» 06 2016 года

Председатель методической комиссии ФВТ  
к.т.н., профессор



Коннов Н.Н.

Сведения о переутверждении программы на очередной учебный год и регистрации изменений

Учебный год	Решение кафедры (№ протокола, дата, подпись зав. кафедрой)	Внесенные изменения	Номера листов (страниц)		
			замененных	новых	аннулированных
2017 - 2018	п/л от 04.09.17 Куз	Список литературы			
2018 - 2019	п/л от 03.09.18 Куз	Список литературы			