

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет физико-математических и естественных наук

УТВЕРЖДАЮ  
Декаан факультета  
С.В. Титов  
« 14 » октября 2018 г.



## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

### М1.2.10.1 Группы и алгебры Ли

Направление подготовки 44.04.01 Педагогическое образование

Магистерская программа Математическое образование

Квалификация (степень) выпускника – Магистр

Форма обучения очная, заочная

Пенза – 2018

### 1. Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Группы и алгебры Ли» является ознакомление с основными понятиями, историей возникновения этих понятий и некоторым приложениями теории групп и алгебр Ли в разделах современной математики и физики.

#### Задачи изучаемой дисциплины:

Исходя из общих целей подготовки магистра педагогического образования по магистерской программе «Математическое образование»:

- содействовать средствами дисциплины «Группы и алгебры Ли» углублению фундаментальной и профессиональной подготовки специалистов в области математического образования, владеющих современными знаниями и технологиями, необходимыми для научно-исследовательской и педагогической деятельности в образовательных учреждениях различного уровня и профильной направленности.

Исходя из конкретного содержания дисциплины:

- сформировать систему основных понятий и фактов линейных пространств и теории групп Ли преобразований для применения в будущей профессиональной деятельности, проведения научных исследований;
- научить студентов доказательно рассуждать, выдвигать гипотезы и их обоснования; научить поиску, систематизации и анализу информации, используя разнообразные информационные источники, включая учебную и справочную литературу.

### 2. Место дисциплины в структуре ОПОП магистратуры

Дисциплина «Группы и алгебры Ли» относится к дисциплинам по выбору.

Для освоения дисциплины обучающиеся используют знания, умения, сформированные в ходе изучения дисциплин предыдущей ступени образования: «Алгебра», «Избранные вопросы общей алгебры», «Дополнительные главы алгебраических систем», «Геометрия», «Дополнительные главы общей топологии и дифференциальной геометрии».

Освоение данной дисциплины является основой для подготовки к итоговой государственной аттестации.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «Группы и алгебры Ли»

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению:

Коды компетенции	Наименование компетенции	Структурные элементы компетенции (в результате освоения дисциплины обучающийся должен знать, уметь, владеть)
1	2	3
ОК-2	Готовность действовать в нестандартных ситуациях, нести социальную и этическую ответственность за принятые решения	<b>Знать:</b> историю возникновения основных положений теории групп и алгебр Ли, развитие этих идей, примеры групп Ли, в частности, классических групп Ли. <b>Уметь:</b> приводить примеры групп и алгебр Ли, решать простейшей задачи, находить левоинвариантные и правоинвариантные векторные поля и дифференциальные 1-формы на группах Ли, сформулировать основные теоремы Ли. <b>Владеть:</b> одним из методов доказательства теорем Ли, навыками построения композиционных рядов в алгебрах Ли, методами доказательства простоты, разрешимости, нильпотентности алгебр Ли.

ПК-3	способность руководить исследовательской работой обучающихся	<p><b>Знать:</b> основы и возможные направления развития теории групп и алгебр Ли.</p> <p><b>Уметь:</b> сформулировать задачи и наметить план их решения.</p> <p><b>Владеть:</b> навыками постановки задач и методами их решений.</p>
ПК-5	Способность анализировать результаты научных исследований, применять их при решении конкретных научно-исследовательских задач в сфере науки и образования, самостоятельно осуществлять научное исследование	<p><b>Знать:</b> основные понятия и примеры теории групп и алгебр Ли, различные методы доказательства теорем Ли.</p> <p><b>Уметь:</b> анализировать и доказывать свойства групп и алгебр Ли.</p> <p><b>Владеть:</b> навыками самостоятельной постановки и решения задач в теории групп и алгебр Ли.</p>

#### 4. Структура и содержание дисциплины «Группы и алгебры Ли»

##### 4.1. Структура дисциплины «Группы и алгебры Ли» по очной форме обучения

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы, 72 часов.

№ п/п	Наименование разделов и тем дисциплины (модуля)	Семестр	Недели семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)										Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра)				
				Аудиторная работа				Самостоятельная работа						собеседование	коллоквиум	тест	контрольная работа	
				Всего	Лекция	Практические занятия	Лабораторные занятия	Всего	Подготовка к аудиторным занятиям	Подготовка к собеседованию	Подготовка к коллоквиуму	Подготовка к тесту	Подготовка к контрольной работе					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
<b>1</b>	<b>Алгебры Ли и их отображения</b>	<b>3</b>	<b>1-6</b>	<b>12</b>	<b>6</b>	<b>6</b>		<b>28</b>	<b>18</b>	<b>10</b>								
1.1	Понятие алгебры Ли. Линейные алгебры Ли.	3	1-2	4	2	2		6	6									
1.2	Алгебры Ли дифференцирований. Абстрактные алгебры Ли	3	3-4	4	2	2		11	6	5								
1.3	Идеалы и гомоморфизмы.	3	5-6	4	2	2		11	6	5				5				
<b>2</b>	<b>Разрешимые и нильпотентные алгебры Ли</b>	<b>3</b>	<b>7-8</b>	<b>4</b>	<b>2</b>	<b>2</b>		<b>19</b>	<b>6</b>		<b>5</b>	<b>8</b>						
2.1	Разрешимость. Нильпотентность.	3	7-8	4	2	2		19	6		5	8				8		
<b>3</b>	<b>Группы Ли</b>	<b>3</b>	<b>9-14</b>	<b>12</b>	<b>6</b>	<b>6</b>		<b>33</b>	<b>18</b>		<b>5</b>		<b>10</b>					
3.1	Определение и простейшие свойства групп Ли Экспоненциальное отображение.	3	9-10	4	2	2		11	6		5				10			
3.2	Касательная алгебра Ли и присоединенное представление	3	11-12	4	2	2		11	6				5					
3.3	Линейные представления групп Ли	3	13-14	4	2	2		11	6				5					13
	Общая трудоемкость, в часах			<b>28</b>	<b>14</b>	<b>14</b>		<b>80</b>	<b>42</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>8</b>	<b>10</b>	Промежуточная аттестация				
														Форма зачет	Семестр <b>3</b>			

#### 4.2. Структура дисциплины «Группы и алгебры Ли» по заочной форме обучения

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы, 72 часов.

№ п/п	Наименование разделов и тем дисциплины (модуля)	Семестр	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)								Формы контроля успеваемости (промежуточная аттестация)			
			Аудиторная работа				Самостоятельная работа				Курсовая работа	экзамен	зачет	контрольная работа
			Всего	Лекция	Практические занятия	Лабораторные занятия	Всего	Подготовка к аудиторным занятиям	Подготовка к зачету	Выполнение контрольной работы				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	13	14	15	16	17
<b>1</b>	<b>Алгебры Ли и их отображения</b>	<b>3</b>	<b>8</b>		<b>8</b>		<b>20</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>8</b>				
1.1	Понятие алгебры Ли. Линейные алгебры Ли.	3	3		3		6	2	2	2				
1.2	Алгебры Ли дифференцирований. Абстрактные алгебры Ли	3	3		3		7	2	2	3				
1.3	Идеалы и гомоморфизмы.	3	2		2		7	2	2	3				
<b>2</b>	<b>Разрешимые и нильпотентные алгебры Ли</b>	<b>3</b>	<b>3</b>		<b>3</b>		<b>7</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>3</b>				
2.1	Разрешимость. Нильпотентность.	3	3		3		7	2	2	3				
<b>3</b>	<b>Группы Ли</b>	<b>3</b>	<b>9</b>		<b>9</b>		<b>21</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>9</b>				
3.1	Определение и простейшие свойства групп Ли Экспоненциальное отображение.	3	3		3		7	2	2	3				
3.2	Касательная алгебра Ли и присоединенное представление	3	3		3		7	2	2	3				
3.3	Линейные представления групп Ли	3	3		3		7	2	2	3			3	3
	Общая трудоемкость, в часах		<b>20</b>		<b>20</b>		<b>48</b>	<b>14</b>	<b>14</b>	<b>20</b>	Промежуточная аттестация			
											Форма зачет		Семестр <b>3</b>	

## 4.2. Содержание дисциплины «Группы и алгебры Ли»

### Раздел 1. Алгебры Ли и их отображения

#### Тема 1.1 Понятие алгебры Ли. Линейные алгебры Ли

Понятие алгебры Ли. Понятие коммутатора. Тождество Якоби. Подагебры. Изоморфизм алгебр Ли. Понятие линейной алгебры Ли. Понятие полной линейной алгебры Ли. Классические алгебры. Понятия специальной линейной алгебры, симплектической алгебры, ортогональной алгебры. Понятия верхнетреугольных матриц, строго верхнетреугольных матриц, диагональных матриц, скалярных матриц.

#### Тема 1.2 Алгебры Ли дифференцирований. Абстрактные алгебры Ли

Понятие  $F$ -алгебры. Понятие дифференцирования в алгебре. Внутреннее дифференцирование, внешнее дифференцирование. Понятие присоединенного представления алгебры Ли. Структурные константы. Абстрактные алгебры Ли.

#### Тема 1.3 Идеалы и гомоморфизмы

Понятие идеала в алгебре Ли. Примеры идеалов: подпространство, состоящее только из нулевого вектора, алгебра Ли, центр  $Z(L)$ , производная алгебра  $[L, L]$ . Понятие простой алгебры. Примеры. Понятия факторалгебры Ли, нормализатора, центролизатора. Понятия гомоморфизма, мономорфизма, эпиморфизма, изоморфизма, автоморфизма алгебр Ли. Каноническое отображение. Представление алгебры Ли.

### Раздел 2. Разрешимые и нильпотентные алгебры Ли

#### Тема 2.1 Разрешимость. Нильпотентность.

Понятие производного ряда. Разрешимая алгебра Ли. Радикал алгебры Ли. Полупростая алгебра Ли. Убывающий центральный ряд. Нильпотентная алгебра Ли. Доказательство теоремы Энгеля. Следствие из теоремы Энгеля.

### Раздел 3. Группы Ли

#### Тема 3.1 Определение и простейшие свойства групп Ли.

##### Экспоненциальное отображение.

Понятие  $d$ -мерного дифференцируемого многообразия. Определение линейной группы Ли. Примеры. Замкнутость группы Ли. Связные компоненты. Связная группа Ли. Понятие экспоненциального отображения. Касательное пространство. Гомоморфизм групп Ли.

#### Тема 3.2 Касательная алгебра Ли и присоединенное представление

Коммутатор матриц. Операция коммутирования. Касательная алгебра группы  $G$ . Примеры. Линейное представление группы  $G$ . Присоединенный оператор элемента. Понятие присоединенного представления группы Ли. Линейное представление алгебры Ли. Понятие присоединенного представления алгебры Ли. Примеры.

#### Тема 3.3 Линейные представления групп Ли

Линейное представление группы Ли и линейное представление её алгебры Ли. Приводимость линейного представления группы. Классификация простых групп Ли.

## 5. Образовательные технологии

При проведении аудиторных занятий и организации самостоятельной работы студентов по дисциплине «Группы и алгебры Ли» используются как традиционные, так и нетрадиционные образовательные технологии.

Технология традиционного обучения предусматривает такие методы и формы изучения материала как лекция, практические занятия:

- информационная лекция:
- проблемная лекция
- лекция-визуализация

Практические занятия направлены на формирование у студентов умений и навыков решения задач, в том числе прикладных и исследовательских задач. В ходе проведения практических занятий используются задания учебно-тренировочного и творческого характера

При изучении дисциплины «Группы и алгебры Ли» используются активные и интерактивные технологии обучения, такие как:

- технология сотрудничества  
*работа в малых группах*  
*коллективная мыслительная деятельность:*
- медиатехнология
- кейс-технология  
*проблемный метод*  
*моделирование*

Занятия, проводимые в интерактивной форме, в том числе с использованием интерактивных технологий составляют 30 % от общего количества аудиторных занятий.

Самостоятельная работа студентов включает работу под руководством преподавателя (собеседования, коллоквиумы) и индивидуальную работу студента.

При реализации образовательных технологий используются следующие виды самостоятельной работы:

- работа с теоретическим материалом;
- решение стандартных задач и упражнений по образцу;
- решение вариативных задач и упражнений;
- поиск информации в сети «Интернет» в дополнительной и справочной литературе;
- подготовка к коллоквиуму;
- подготовка к сдаче экзамена.

В целях реализации индивидуального подхода к обучению студентов, осуществляющих учебный процесс по собственной траектории в рамках индивидуального рабочего плана, изучение данной дисциплины базируется на следующих возможностях: обеспечение внеаудиторной работы со студентами в том числе в электронной образовательной среде с использованием соответствующего программного оборудования, дистанционных форм обучения, возможностей интернет-ресурсов, индивидуальных консультаций и т.д.

**6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.  
Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации  
по итогам освоения дисциплины «Группы и алгебры Ли»**

**6.1. План самостоятельной работы студентов**

Неделя	№ темы	Вид самостоятельной работы	Рекомендуемая литература	Часы
1	2	3	4	5
		<b>Раздел 1. Алгебры Ли и их отображения</b>		<b>28</b>
1-2	1.1	Подготовка к аудиторному занятию: <ul style="list-style-type: none"> <li>• работа с теоретическим материалом;</li> </ul> Определение алгебры Ли, подалгебры классических алгебр Ли <ul style="list-style-type: none"> <li>• решение задач и упражнений:</li> </ul> стандарт: понятие алгебры Ли, тождество Якоби вариативные: специальные алгебры Ли <ul style="list-style-type: none"> <li>• поиск литературы и упражнений в сети</li> </ul>	осн. 1-5  осн. 3 стр 17 №1-7	6
3-4	1.2	Подготовка к аудиторному занятию: <ul style="list-style-type: none"> <li>• работа с теоретическим материалом</li> </ul> Определение алгебры дифференцирований, внутренних дифференцирований <ul style="list-style-type: none"> <li>• решение задач и упражнений:</li> </ul> стандарт: F-алгебры, дифференцирования линейных алгебр вариативные: внутренние и внешние дифференцирования <ul style="list-style-type: none"> <li>• подготовка к собеседованию</li> </ul>	осн. 1-5  осн. 3 стр 17 № 7-12	11
5-6	1.3	Подготовка к аудиторному занятию: <ul style="list-style-type: none"> <li>• работа с теоретическим материалом;</li> </ul> Определение идеала, фактор алгебры <ul style="list-style-type: none"> <li>• решение задач и упражнений</li> </ul> стандарт: нахождение идеалов, производных алгебр вариативные: фактор алгебры, нормализаторы <ul style="list-style-type: none"> <li>• подготовка к собеседованию</li> </ul>	осн. 1-5  осн. 3 стр 22 №1,2,3,4	11
		<b>Раздел 2. Разрешимые и нильпотентные алгебры Ли</b>		<b>19</b>
7-8	2.1	Подготовка к аудиторному занятию: <ul style="list-style-type: none"> <li>• работа с теоретическим материалом;</li> </ul> Определение производного ряда, разрешимой алгебры <ul style="list-style-type: none"> <li>• решение задач и упражнений</li> </ul> стандарт: нахождение производного ряда алгебры Ли вариативные: центральный ряд <ul style="list-style-type: none"> <li>• подготовка к тесту</li> </ul>	осн. 1-5  осн. 3 стр 27 №1,2,3	19
		<b>Раздел 3. Группы Ли</b>		<b>33</b>
9-10	3.1	Подготовка к аудиторному занятию: <ul style="list-style-type: none"> <li>• работа с теоретическим материалом;</li> </ul> Определение группы Ли <ul style="list-style-type: none"> <li>• решение задач и упражнений</li> </ul>	осн. 1-5  осн.4 стр 164	11



		<p>стандарт: гладкие многообразия, линейные группы</p> <p>вариативные: абстрактные группы Ли</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• подготовка к коллоквиуму</li> </ul>	№ 1, 2	
11-12	3.2	<p>Подготовка к аудиторному занятию:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• работа с теоретическим материалом;</li> </ul> <p>Определение касательной алгебры Ли, группы Ли</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• решение задач и упражнений</li> </ul> <p>стандарт: операция коммутирования. Касательная алгебра группы Ли</p> <p>вариативные: присоединенное представление группы Ли</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• подготовка к контрольной работе</li> </ul>	<p>осн. 1-5</p> <p>осн. 4 стр 206 № 1,2,3</p>	11
13-14	3.3	<p>Подготовка к аудиторному занятию:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• работа с теоретическим материалом;</li> </ul> <p>Определение линейного представления группы Ли</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• решение задач и упражнений</li> </ul> <p>стандарт: линейные представления классических групп Ли</p> <p>вариативные: представление абстрактных групп Ли</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• подготовка к контрольной работе</li> </ul>	<p>осн. 1-5</p> <p>осн. 4, стр 206 № 4,5,6</p>	11

## **6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов**

### **Работа с литературой**

Самостоятельная работа с учебниками и книгами, самостоятельное теоретическое исследование проблем, обозначенных преподавателем на лекциях – важнейшее условие формирования у студента научного способа познания. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги. Изучая материал по учебной книге (учебнику, учебному пособию, монографии, хрестоматии и др.), следует переходить к следующему вопросу только после полного уяснения предыдущего, фиксируя выводы и вычисления, в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода. Особое внимание студент должен обратить на определение основных понятий курса. Надо подробно разбирать примеры, которые поясняют определения, и приводить аналогичные примеры самостоятельно. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебной книге полезно либо в тетради на специально отведенных полях, либо в документе, созданном на ноутбуке, планшете и др. информационном устройстве, дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем. Выводы, полученные в результате изучения учебной литературы, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы при перечитывании материала они лучше запоминались.

#### **Методические рекомендации студенту по составлению конспекта:**

Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта. Выделите главное, составьте план. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли. В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи надо распределять в определенной последовательности, отвечающей логической структуре текста. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля. Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

#### **Подготовка к практическим занятиям**

Для того чтобы практические и семинарские занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение в решении задач, подготовка к семинару проводятся по прочитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует помнить, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения, с которой он излагается на лекциях, материал будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекции, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач, обсуждения вопросов, вынесенных на семинар. Данные условия помогут студенту хорошо усвоить материал, научиться применять его на практике.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если существует несколько путей решения проблемы (задачи), нужно сравнить их и выбрать наиболее рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками. Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, которого требует условие, по

возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из условия данной задачи. Полезно решать задачи несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

**Самопроверка.** После изучения определенной темы по записям конспекта и учебнику, решения соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно, студенту рекомендуется, используя лист опорных сигналов, воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки основных положений и доказательств. В случае необходимости нужно еще раз разобраться в материале. Помните, недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. Если это имеет место быть, надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала – умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако правильное решение задачи может получиться и в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

**Консультации.** Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при решении задач возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах надо четко выразить, в чем испытываете затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

#### **Подготовка к собеседованию, коллоквиуму, зачету, экзамену**

**Собеседование** – средство контроля, организованное как специальная беседа преподавателя с обучающимся на темы, связанные с изучаемой дисциплиной, и рассчитанное на выяснение объема знаний обучающегося по определенному разделу, теме, проблеме и т.п. Работа проводится индивидуально. Список вопросов, понимание смысла которых необходимо для освоения темы, раздаётся на карточках, студенты предварительно составляют план (конспект) ответа на бумаге. Время, отведенное на подготовку, составляет 10 мин. Происходит устный ответ на вопрос. Оценивание преподавателем проводится после окончания ответа, сразу озвучивается результат.

При подготовке к экзаменам, зачету, собеседованию вначале надо просмотреть материал по всем вопросам сдаваемой дисциплины, далее отметить для себя наиболее трудные вопросы и обязательно в них разобраться. В заключение еще раз целесообразно повторить основные положения, используя при этом листы опорных сигналов. Итак, систематическая подготовка к занятиям в течение семестра позволит использовать время экзаменационной сессии для структурирования знаний.

### **6.3. Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов**

#### **Контроль освоения компетенций**

№ п/п	Вид контроля	Контролируемые темы (разделы)	Компетенции, компоненты которых контролируются
1	Собеседование	Алгебры Ли и их отображения	ОК-2, ПК-3, 5
2	Тест, коллоквиум	Разрешимые и нильпотентные алгебры Ли	ОК-2, ПК-3, 5
3	Контрольная работа	Группы Ли	ОК-2, ПК-3, 5

## Вопросы для собеседования

1. Определение линейной алгебры.
2. Примеры линейных алгебр.
3. Алгебры Ли.
4. Примеры алгебр Ли.
5. Описание алгебр Ли размерностей  $2 \leq 2$ .
6. Описание алгебр Ли размерностей 3.
7. Определение изоморфизма алгебр Ли.
8. Дифференцирование линейных алгебр.
9. Алгебра Ли дифференцирований.
10. Определение представления алгебры Ли.

## Вопросы для коллоквиума

1. Радикалы алгебр Ли.
2. Примеры разрешимых алгебр Ли.
3. Определение разрешимой и неразрешимой алгебры Ли.
4. Неразрешимые алгебры Ли размерностей 3.
5. Определение гладкого многообразия конечной размерности.
6. Определение группы. Примеры групп.
7. Определение линейной группы Ли.
8. Абстрактная группа Ли.
9. Касательное пространство группы Ли.
10. Определение линейного представления группы Ли.

## Тест

1. Пусть  $Mat(2, \mathbb{R})$  множество квадратных матриц второго порядка над полем действительных чисел. Сложение матриц и умножение на числа определяется по формулам

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a_1 & b + b_1 \\ c + c_1 & d + d_1 \end{pmatrix},$$
$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}.$$

Докажите, что множество  $Mat(2, \mathbb{R})$  с введенными операциями является векторным пространством – векторным пространством квадратных матриц порядка 2.

2. Определим на векторном пространстве  $Mat(2, \mathbb{R})$  операцию умножения следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 + bc_1 & ab_1 + bd_1 \\ ca_1 + dc_1 & cb_1 + dd_1 \end{pmatrix}.$$

Докажите, что введенная операция – линейна по каждому аргументу.

3. Покажите, что алгебра  $Mat(2, \mathbb{R})$  - ассоциативная.
4. Найдите размерность алгебры  $Mat(2, \mathbb{R})$ .
5. Пусть  $A, B \in Mat(2, \mathbb{R})$ . Введем на этом множестве операцию коммутирования  $[,]$  условием  $[A, B] = AB - BA$ .

Проверьте, что  $(Mat(2, \mathbb{R}), [,])$  является алгеброй Ли.

6. Пусть  $L$ - ассоциативная алгебра над полем  $\mathbb{R}$ , определим операцию  $[,]$  коммутирования указанным в задаче 5 способом:  $[a, b] = ab - ba$ . Докажите, что  $L$ , сведенной операцией коммутирования, является алгеброй Ли.

7. Найдите несколько подалгебр алгебры  $(Mat(2, \mathbb{R}), \cdot)$ , алгебры  $(Mat(2, \mathbb{R}), [,])$ .

8. Найдите алгебру Ли дифференцирований конечномерной алгебры  $\mathbb{A}$ , операция умножения в которой определяется соотношением:

$e_i e_j = e_j$ , остальные произведения базисных элементов равны 0 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

9. Пусть  $\mathbb{A}$  - двумерная алгебра Ли с базисом  $(e_1, e_2)$ , таким, что  $[e_1, e_2] = -[e_2, e_1] = e_1$ , а все остальные произведения базисных элементов равны 0. Докажите, что всякое дифференцирование этой алгебры является внутренним.

10. Пусть  $\mathbb{A}$  - трехмерная алгебра Ли с базисом  $(e_1, e_2, e_3)$ , причем  $[e_1, e_2] = e_3, [e_2, e_3] = e_1, [e_3, e_1] = e_2$  и  $\mathbb{B}$  - трехмерная алгебра Ли с базисом  $(e_1, e_2, e_3)$ , причем  $[e_1, e_2] = e_3, [e_2, e_3] = -e_1, [e_3, e_1] = e_2$  над полем действительных чисел. Докажите, что эти алгебры неизоморфны.

### Контрольная работа

1. Проверьте, что алгебры  $\mathbb{A}, \mathbb{B}$  задачи 10 – неразрешимые.
2. Найдите матрицы присоединенных представлений алгебр Ли задачи 10, задачи 9.
3. Докажите, что группа  $GL(2, \mathbb{R})$  невырожденных квадратных матриц второго порядка над полем  $\mathbb{R}$  действительных чисел является группой Ли размерности 4.
4. Докажите, что группа  $SL(2, \mathbb{R})$  квадратных матриц с определителем 1, есть группа Ли размерности 3.
5. Найдите алгебру Ли группы  $GL(2, \mathbb{R})$ .
6. Найдите алгебру Ли группы  $SL(2, \mathbb{R})$ .
7. Найдите размерность ортогональной группы  $O_n(\mathbb{R})$ , которая задается матричным уравнением  $gg^t = e$ , где  $g$  – квадратная матрица порядка  $n$ ,  $g^t$  – транспонированная к  $g$  матрица,  $e$  - единичная матрица.
8. Найдите касательную алгебру Ли группы  $O_2(\mathbb{R})$ .
9. Найдите касательную алгебру Ли группы Ли  $SO_2(\mathbb{R})$ .
10. Докажите, что группа  $SO_2(\mathbb{R})$  - простая.

### Вопросы к зачету

1. Определение линейной алгебры.
2. Примеры линейных алгебр.
3. Алгебры Ли.
4. Примеры алгебр Ли.
5. Описание алгебр Ли размерностей .
6. Описание алгебр Ли размерностей 3.
7. Определение изоморфизма алгебр Ли.
8. Дифференцирование линейных алгебр.
9. Алгебра Ли дифференцирований.
10. Определение представления алгебры Ли.
11. Определение разрешимой и неразрешимой алгебры Ли.
12. Радикалы алгебр Ли.
13. Примеры разрешимых алгебр Ли.
14. Неразрешимые алгебры Ли размерностей 3.
15. Определение гладкого многообразия конечной размерности.
16. Определение группы. Примеры групп.
17. Определение линейной группы Ли.
18. Абстрактная группа Ли.
19. Касательное пространство группы Ли.
20. Определение линейного представления группы Ли.

## 7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины «Группы и алгебры Ли»

### Основная литература

1. [Винберг Э.Б. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2011.](#)
2. [Кострикин А. И. Введение в алгебру \[Текст\] : учебник / Алексей Иванович Кострикин. - 2-е изд., стереотип. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001 - . Ч.3 : Основные структуры алгебры. - 272 с.](#)
3. [Хамфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. - М.: МИНМО, 2003.](#)
4. [Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969 \(djvu\)](#)
5. [Шевалле К. Теория групп Ли. Том II. - М.: ГИИЛ. - 1958.](#)

### Программное обеспечение и Интернет-ресурсы

1. Лицензионное программное обеспечение: - «Microsoft Windows»; - «Microsoft Office 2007»; - «Антивирус Касперского».
2. Свободно распространяемое программное обеспечение: Open Office; Mozilla Firefox; Google Chrome; Adobe Acrobat Reader.

### Современные профессиональные базы данных и информационно-справочные системы

№	Название	Электронный адрес	Содержание
1.	Math.ru	<a href="http://www.math.ru/lib/cat/">http://www.math.ru/lib/cat/</a>	Каталог книг, журналов, лекций, посвященных различным разделам математики
2.	Математика	<a href="http://www.mathematics.ru">www.mathematics.ru</a>	учебный материал по различным разделам математики – алгебра, планиметрия, стереометрия, функции, графики и другие.
3.	Geometry.ru	<a href="http://geometry.ru/articles.php">http://geometry.ru/articles.php</a> <a href="http://geometry.ru/books.php">http://geometry.ru/books.php</a> <a href="http://geometry.ru/video.php">http://geometry.ru/video.php</a>	Списки статей, книг, видеоматериалов, посвященных элементарной геометрии и решению геометрических задач.
4.	Российское образование	<a href="http://www.edu.ru/documents/">http://www.edu.ru/documents/</a> <a href="http://www.edu.ru/abitur/act.82/index.php">http://www.edu.ru/abitur/act.82/index.php</a>	Нормативно-правовая база: ФГОСы и другие документы, связанные с российским образованием.
5.	ЭБС Лань	<a href="https://e.lanbook.com/books">https://e.lanbook.com/books</a> <a href="https://e.lanbook.com/journals#ebs_journal">https://e.lanbook.com/journals#ebs_journal</a> <a href="https://e.lanbook.com/vkrs#ebs_vkr">https://e.lanbook.com/vkrs#ebs_vkr</a>	Электронно-библиотечная система: коллекции книг ведущих издательств учебной и научной литературы, а также вузовских издательств, сгруппированные по основным областям знаний; более 700 научных журналов по различным областям знаний, к 500 из которых предоставлен доступ в формате Open Access, список выпускных квалификационных работ.
6.	ЭБС ВООК.ru	<a href="http://www.book.ru">http://www.book.ru</a>	ВООК.ru — электронно-библиотечная система, которая содержит учебные и научные издания от преподавателей ведущих вузов России. Фонд электронной библиотеки комплектуется на основании новых ФГОС ВО, СПО.
7.	Библио-комплектатор	<a href="http://www.bibliocomplectator.ru/collections">http://www.bibliocomplectator.ru/collections</a>	Систематизированный каталог учебной литературы для высшего и среднего образования, периодических изданий, электронных учебников и пособий для школьного образования, мультимедийных материалов и научных иностранных изданий. Ресурс облегчает поиск и систематизацию актуальных источников литературы среди более 400 крупных научных издательств,

№	Название	Электронный адрес	Содержание
			университетских коллекций авторитетных вузов России, ведущих авторских коллективов и позволяет учебным заведениям, научным и публичным библиотекам, корпоративным подписчикам совершенствовать свои фонды и обеспечивать своим читателям беспрепятственный доступ к ним.
8.	MathSolution.ru	<a href="http://www.mathsolution.ru/books/">http://www.mathsolution.ru/books/</a> <a href="http://www.mathsolution.ru/ref-list/37">http://www.mathsolution.ru/ref-list/37</a>	Список учебников и каталог рефератов, посвященных решению различных математических задач, а также список некоторых задач с кратким описанием методов их решения.
9.	Электронная библиотека ПГУ	<a href="https://elib.pnzgu.ru/category/1">https://elib.pnzgu.ru/category/1</a>	Раздел Физико-математические науки Электронной библиотеки пензенского государственного университета
10.	ИС «Единое окно доступа к образовательным ресурсам»	<a href="http://window.edu.ru/catalog/resources?p_rubr=2.2.74.12">http://window.edu.ru/catalog/resources?p_rubr=2.2.74.12</a>	Раздел Математика каталога образовательных интернет-ресурсов и электронной библиотеки учебно-методических материалов для профессионального образования
11.	ЭБС Znanium.com	<a href="http://znanium.com/catalog/tbk/6/?noy=1">http://znanium.com/catalog/tbk/6/?noy=1</a>	Раздел Естественные науки. Математика электронно-библиотечной системы Znanium.com.

### 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины «Группы и алгебры Ли»

Для освоения данной дисциплины необходимы:

– мультимедийные средства обучения (компьютер и проектор, ресурсы Интернета).





Рабочая программа дисциплины «Группы и алгебры Ли» составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 44.04.01 Педагогическое образование.

Программу составили:

1. Султанов А.Я., к.ф.-м.н., доцент кафедры «МО»
2. Осьминина Н.А., к.ф.-м.н., доцент кафедры «МО»

  
(подпись)

  
(подпись)

**Настоящая программа не может быть воспроизведена ни в какой форме без предварительного письменного разрешения кафедры-разработчика программы.**

Программа одобрена на заседании кафедры «Математическое образование»


Протокол № 3 от "4" октября 2018 года

Зав. кафедрой «МО»

  
(подпись) В.И. Паньженский

1, 20,  
21, 23

Программа согласована с заведующим  
выпускающей кафедрой «Информатика  
и методика обучения информатике и математике»

  
(подпись) М.А. Родионов

Программа одобрена методической комиссией ФФМЕН

Протокол № 2 от "15" 10 2018 года

Председатель методической комиссии  
ФФМЕН

  
(подпись) М.А. Родионов