

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ**



УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

Л.Р.Фионова

« 03 »

04

2019 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.В.07 МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Направление подготовки 01.03.04 «Прикладная математика»

Направленность (профиль подготовки) «Математическое моделирование в
экономике и технике»

Квалификация выпускника – бакалавр

Форма обучения – очная

Пенза, 2019

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Метод конечных элементов» являются:

– приобретение обучающимися знаний и умений по применению математического аппарата для решения поставленных задач методом конечных элементов;

– выработка понимания формальных основ метода конечных элементов, а также навыков перевода математических задач в форме дифференциальных уравнений в численные задачи, допускающих решение на ЭВМ.

Формируемые дисциплиной знания и умения готовят выпускника данной образовательной программы к выполнению следующих трудовых функций:

– А/01.5 Осуществление проведения работ по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований (профстандарт 40.011 «Специалист по научно-исследовательским и опытно-конструкторским разработкам»);

– А/02.5 Осуществление выполнения экспериментов и оформления результатов исследований и разработок (профстандарт 40.011 «Специалист по научно-исследовательским и опытно-конструкторским разработкам»);

– А/03.5 Подготовка элементов документации, проектов планов и программ проведения отдельных этапов работ (профстандарт 40.011 «Специалист по научно-исследовательским и опытно-конструкторским разработкам»);

2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата

Учебная дисциплина «Метод конечных элементов» в учебном плане содержится в части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1 «Дисциплины (модули)» ОПОП. Данная дисциплина имеет логическую и содержательно-методологическую взаимосвязь с другими частями ОПОП, так как углубляет и закрепляет математические и естественнонаучные знания и навыки, сформированные в результате изучения дисциплин базовой части.

Изучение данной учебной дисциплины базируется на знаниях, полученных в рамках ранее пройденных дисциплин: «Математические модели экономики и техники», «Граничные интегральные уравнения», «Вычислительная математика». Основные положения дисциплины должны быть использованы при изучении дисциплин: «Производственная практика (преддипломная)», «Выполнение и защита ВКР».

3. Результаты освоения дисциплины «Метод конечных элементов»

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению:

Коды компетенции	Наименование компетенции	Индикатор достижения компетенции (<i>закрепленный за дисциплиной</i>)	В результате освоения дисциплины обучающийся должен :
ПК-2	Способен проводить исследования на основе существующих методов в области математического моделирования в экономике и технике	ПК-2.1 Применяет математический аппарат для решения поставленных задач в научно-исследовательской деятельности	<p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> - методы исследования основных инженерных и научных задач проектирования и разработки объектов профессиональной деятельности; - численные методы решения типовых математических задач. <p>Уметь:</p> <p>применять метод конечных элементов к решению математических задач, представленных в форме краевых задач для дифференциальных уравнений.</p> <p>Владеть:</p> <p>принципами работы современных пакетов прикладных программ.</p>

4. Структура и содержание дисциплины «Метод конечных элементов»

4.1. Структура дисциплины «Метод конечных элементов»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единиц, 108 часов.

№ п/п	Наименование разделов и тем дисциплины (модуля)	Семестр	Недели семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)							Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам)		
				Контактная работа					Самостоятельная работа		Собеседование	Проверка контролльн. работ	Контроль выполнения домаш- него задания.
				Всего	Лекция	Практические занятия	Лабораторные занятия	Др. виды контакт. работы	Всего	Подготовка к аудиторным за- нятиям			
1.	Раздел 1. Метод конечных элемен- тов	8	1– 2	12	4	4	4		4	4	3		2–3
1.1.	Проекционный и вариационный подходы. Основные понятия	8	1		2	2	2		2	2	3		2
1.2.	Концепция метода. Преимущества и недостатки	8	2		2	2	2		2	2	3		3
2.	Раздел 2. Дискретизация области	8	3	6	2	2	2		2	2	4		4
2.1.	Типы конечных элементов	8	3		1	1	1		1	1	4		4
2.2.	Разбиение области на элементы. Нумерация узлов	8	3		1	1	1		1	1	4		4
3.	Раздел 3. Линейные интерполяци- онные полиномы	8	4– 6	18	6	6	6		18	18	5–7		5–7
3.1.	Одномерный элемент с кусочно-	8	4		2	2	2		6	6	5		5

	линейными базисными функциями												
3.2.	Двумерный и трехмерный симплекс-элемент	8	5		2	2	2		6	6	6		6
3.2.	Местная система координат. Свойства интерполяционного полинома	8	6		2	2	2		6	6	7	6	7
4.	Раздел 4. Применение МКЭ для задач теплопроводности, упругости	8	7–8	12	4	4	4		12	12	8, 9		8–9
4.1.	Применение треугольных конечных элементов в задаче теплопроводности.	8	7		2	2	2		6	6	8		8
4.2.	Применение четырехугольных конечных элементов в задаче упругости.	8	8		2	2	2		6	6	9		9
5.	Раздел 5. Программные средства МКЭ – Пакет Elcut	8	9–10	12	4	4	4		9,75	9,75	10		10
5.1.	Описание задачи. Задание меток и определение граничных условий. Анализ результатов	8	9		2	2	2		5	5	10		10
5.2.	Описание 3D-задач в Elcut. Анализ результатов	8	10		2	2	2		4,75	4,75	10	10	10
	<i>Контактная работа</i>			2,25				2,25					
	Общая трудоемкость, в часах			62,25	20	20	20	2,25	45,75	45,75	Форма Зачет		Семестр 8

4.2. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1	Метод конечных элементов	1. Проекционный и вариационный подходы. Основные понятия 2. Концепция метода. Преимущества и недостатки
2	Дискретизация области	1. Типы конечных элементов 2. Разбиение области на элементы. Нумерация узлов
3	Линейные интерполяционные полиномы	1. Одномерный элемент с кусочно-линейными базисными функциями. Пример решения. Реализация МКЭ в одномерном случае 2. Линейный треугольный элемент (двумерный симплекс-элемент). Трехмерный симплекс-элемент. Аппроксимация векторных величин 3. Местная система координат. Свойства интерполяционного полинома
4	Применение МКЭ для задач теплопроводности, упругости	1. Применение треугольных конечных элементов в задаче теплопроводности. Программная реализация 2. Применение четырехугольных конечных элементов в задаче упругости. Программная реализация
5	Программные средства МКЭ – Пакет Elcut	1. Описание задачи. Задание меток и определение граничных условий. Анализ результатов 2. Описание 3D-задач в Elcut. Анализ результатов

Лабораторный практикум

№ п/п	№ раздела дисциплины	Наименование лабораторных работ
1.	3	Одномерный метод конечных элементов
2.	4	Двумерная задача теплопроводности
3.	5	ELCUT

5. Образовательные технологии

В процессе изучения дисциплины «Метод конечных элементов» предполагается использовать структурно-логические и интеграционные образовательные технологии, реализуемые посредством:

- лекций в виде вводных, текущих, обзорных и заключительно-обобщающих занятий;

- практических занятий с использованием методов «многократного повторения» (темы 2.1, 2.2, 4.1, 5.1); по логике мышления – индуктивные, дедуктивные и репродуктивные.

- организации самостоятельной работы на основе личностно-дифференцированного подхода планирования задания в виде воспроизводящей и частично-поисковой работ.

- организации текущего контроля знаний студентов методами: выполнения домашних заданий, оценки активности на практических занятиях и

рейтинговой системы общей оценки знаний студентов.

Занятия, проводимые в интерактивных формах, с использованием интерактивных технологий составляют 30% занятий.

В целях реализации индивидуального подхода к обучению студентов, осуществляющих учебный процесс по собственной траектории в рамках индивидуального рабочего плана, изучение данной дисциплины базируется на следующих возможностях: обеспечение внеаудиторной работы со студентами в том числе в электронной образовательной среде с использованием соответствующего программного оборудования, дистанционных форм обучения, возможностей интернет-ресурсов, индивидуальных консультаций и т.д.

Другие виды контактной работы: проведение консультаций, прием зачета.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

6.1. План самостоятельной работы студентов

№ нед.	Тема	Вид самостоятельной работы	Задание	Рекомендуемая литература	Количество часов
4-6	Линейные интерполяционные полиномы	Подготовка к лабораторным работам	Лабораторная работа № 1 «Одномерный метод конечных элементов» <i>Задание на исследование</i> решить дифференциальное уравнение методом конечных элементов (с линейными базисными функциями), разбивая область на n и $2n$ элементов (сетка равномерная); $n = 5 + N$; N – номер варианта. Исходные уравнения – дифференциальные уравнения второго порядка	П.7 а) 1–2,	12
7-8	Применение МКЭ для задач теплопроводности, упругости	Подготовка к лабораторным работам	Лабораторная работа № 2 «Двумерный метод конечных элементов» <i>Задание на исследование</i> решить краевую задачу для уравнения теплопроводности методом конечных элементов (с линейными базисными функциями)	П.7 а) 1–2,	8
9-10	Программные средства МКЭ	Подготовка к лабораторным работам	Лабораторная работа № 3 «Eicut» <i>Задание на исследование</i> решить дифференциальное урав-	П.7 а) 1–2,	6

	– Пакет Elcut	работам	<p>нение методом конечных элементов (с линейными базисными функциями), разбивая область на n и $2n$ элементов (сетка равномерная); $n = 5 + N$; N – номер варианта.</p> <p>Исходные уравнения – дифференциальные уравнения второго порядка</p> <p>В теплопроводящей среде, как показано на схеме, проходят кабели, излучающие тепло. Среда имеет коэффициенты теплопроводности K_x и K_y. Коэффициент теплообмена на поверхности среды α. На некоторых участках рассматриваемая среда ограничена толстым слоем изоляции. Температура воздуха на отдельных участках среды, где происходит конвективный теплообмен, T_∞. На некоторых участках среды задана температура T. Мощность излучения тепла каждым кабелем составляет Q. Требуется, используя исходные данные для своего варианта и схему задания: 1. Определить распределение температуры в заданной области. 2. Определить градиенты температур и среднюю температуру по области.</p>		
1–2	Метод конечных элементов	Подготовка к аудиторным занятиям	Контрольное задание № 1	П.7 а) 1–2	4
3	Дискретизация области	Подготовка к аудиторным занятиям	Контрольное задание № 1	П.7 а) 1–2	2
4–6	Линейные интерполяционные полиномы	Подготовка к аудиторным занятиям	Контрольное задание № 2	П.7 а) 1–2	6
7–8	Применение МКЭ для задач теплопроводности, упругости	Подготовка к аудиторным занятиям	Контрольное задание № 2	П.7 а) 1–2	4
9–10	Программные средства МКЭ	Подготовка к аудиторным занятиям	Контрольное задание № 2	П.7 а) 1–2	4

	– Пакет Elcut	занятиям			
1-10	Все темы	Подготовка к зачету	Изучение теоретического материала и решение задач	П.7 а) 1–2	

Образец типового контрольного задания № 1

1. Решить дифференциальное уравнение методом конечных элементов (с линейными базисными функциями), разбивая область на n и $2n$ элементов (сетка равномерная); $n = 5 + N$; N – номер варианта.

2. Выполнить переход от дифференциальной постановки к интегральной, а также вывод элементной матрицы жесткости и элементного вектора правой части,

3. Записать общий вид глобальной матрицы системы и вывод точного решения.

4. Разбейте треугольную (или близкую к треугольной) область на 16 треугольных элементов и вычислите ширину полосы, при наличии двух степеней свободы.

5. Разбейте четырёхугольник на 24 элемента, используя 5 узлов вдоль одной пары сторон и четыре узла вдоль другой пары. Пронумеруйте узлы так, чтобы получилось минимальное значение величины R .

Образец типового контрольного задания № 2

1. Свести двумерное уравнение теплопроводное методом взвешенных невязок к методу конечных элементов (с линейными базисными функциями), разбивая область на n и $2n$ элементов (сетка равномерная); $n = 5 + N$; N – номер варианта.

2. Прогиб опёртой балки, подверженной действию постоянного изгибающего момента M , описывается дифференциальным уравнением $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{M}{EI} = 0, y_0 = y_L = 0$, где EI – жёсткость поперечного сечения, не зависящее от длины. Дайте вариационную формулировку этой задачи. Выведите систему уравнений для Y_2, Y_3, Y_4 , используя четырёхэлементную модель.

6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

- **Подготовка к аудиторным занятиям** проводится посредством изучения курса лекций, дополнительной литературы, а также решения предложенных задач.

- **Подготовка к зачету** – изучение курса лекций, упражнения в решении типовых задач, изучение дополнительной литературы.

6.3. Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов

Контроль освоения компетенций

№ п/п	Вид контроля	Контролируемые темы (разделы)	Компетенции, компоненты которых контролируются
1	Лабораторная работа № 1	Раздел 3	ПК-2
2	Лабораторная работа № 2	Раздел 4	ПК-2
3	Лабораторная работа № 3	Раздел 5	ПК-2
4	Контрольная работа № 1	Раздел 1, 2	ПК-2
5	Контрольная работа № 1	Раздел 3, 4	ПК-2

Демонстрационный вариант контрольной работы № 1

1. Назовите основные концепции метода конечных элементов. Укажите преимущества и недостатки.

2. Назовите основные типы конечных элементов и укажите в чем их особенность.

3. Объясните на примере как осуществляется разбиение области на конечные элементы и нумерация узлов.

Демонстрационный вариант контрольной работы № 2

1. Что такое двумерный, трёхмерные симплекс – элементы? Раскройте понятие «интерполирование векторных величин».

2. Что такое «местная система координат»? Назовите свойства интерполяционного полинома.

3. Опишите алгоритм построения решения методом конечных элементов на задаче уравнения переноса тепла (одномерный случай переноса)

Вопросы к зачету

1. Проекционный и вариационный подходы.
2. Основные понятия МКЭ.
3. Концепция метода. Преимущества и недостатки
4. Типы конечных элементов
5. Разбиение области на элементы. Нумерация узлов
6. Одномерный элемент с кусочно-линейными базисными функциями.
7. Линейный треугольный элемент (двумерный симплекс-элемент).
8. Трёхмерный симплекс-элемент. Аппроксимация векторных величин
9. Местная система координат. Свойства интерполяционного полинома
10. Применение треугольных конечных элементов в задаче теплопроводности.
11. Применение четырехугольных конечных элементов в задаче упругости.
12. МКЭ в Elcut. Описание задачи. Анализ результатов
13. МКЭ в Elcut. Описание 3D-задач в Elcut. Анализ результатов

Материалы для проведения текущего контроля знаний и промежуточной аттестации составляют отдельный документ – Фонд оценочных средств по дисциплине «Вычислительная математика».

Демонстрационные варианты оценочных средств для каждого вида контроля можно посмотреть <http://moodle.pnzgu.ru> в разделе дисциплины

7. Учебно-методическое и материально-техническое обеспечение дисциплины «Метод конечных элементов»

а) литература

1. Статика упругих систем / В. Д. Потапов [и др.] ; под ред. В. Д. Потапова. - М. : Высш. шк., 2007. - 511 с. : ил. (10 экземпляров). [http://kleopatra.pnzgu.ru/cgi-](http://kleopatra.pnzgu.ru/cgi-bin/irbis64r_91/cgiirbis_64.exe?P21DBN=KATL&I21DBN=KATL_PRINT&S21FMT=fullw_print&C21COM=F&Z21MFN=9426)

[bin/irbis64r_91/cgiirbis_64.exe?P21DBN=KATL&I21DBN=KATL_PRINT&S21FMT=fullw_print&C21COM=F&Z21MFN=9426](http://kleopatra.pnzgu.ru/cgi-bin/irbis64r_91/cgiirbis_64.exe?P21DBN=KATL&I21DBN=KATL_PRINT&S21FMT=fullw_print&C21COM=F&Z21MFN=9426)

2. Моделирование электростатического и магнитостатического полей в среде ELCUT [Текст] : учебное пособие / Н. Н. Григорьевский. - Пенза : Пенз. гос. ун-т, 2014. - 68 с. (20 экземпляров) http://kleopatra.pnzgu.ru/cgi-bin/irbis64r_91/cgiirbis_64.exe?P21DBN=KATL&I21DBN=KATL_PRINT&S21FMT=fullw_print&C21COM=F&Z21MFN=17018

б) Интернет-ресурсы

1. ELCUT Студенческий. распространяется бесплатно. https://elcut.ru/free_soft_r.htm

в) программное обеспечение

1. ПО «Microsoft Windows» (подписка DreamSpark/Microsoft Imagine Standard); регистрационный номер 00037FFEBACF8FD7 Договор № СД-130712001 от 12.07.2013 (подписка с 1 сентября 2013 г. до 31 августа 2017 г.) Продление Microsoft Imagine Standard KDF-00031 (подписка с 1 сентября 2017 г. до 31 августа 2020 г.)

2. Microsoft VISUAL STUDIO 2010. Договор № СД-130712001 от 12.07.2013 (подписка с 1 сентября 2013 г. до 31 августа 2017 г.). Продление Microsoft Imagine Standard KDF-00031 (подписка с 1 сентября 2017 г. до 31 августа 2020 г.).

г) Другое материально-техническое обеспечение

1. Персональные компьютеры

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Занятия по дисциплине «Метод конечных элементов» проводятся в лекционных аудиториях университета и в компьютерных классах.

Рабочая программа дисциплины «Метод конечных элементов» составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.04 – «Прикладная математика», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от «10» января 2018 г. №11.

Программу составили:

1. Тарасов Д.В. _____  _____ доцент кафедры ВиПМ

Настоящая программа не может быть воспроизведена ни в какой форме без предварительного письменного разрешения кафедры-разработчика программы.

Программа одобрена на заседании кафедры «Высшая и прикладная математика»

Протокол № 11 от «01» 01 2019 года

Зав. кафедрой ВиПМ _____  _____ д.ф.м.н., проф. Бойков И.В.

Программа согласована с заведующим выпускающей кафедрой «Высшая и прикладная математика»

Зав. кафедрой ВиПМ _____  _____ д.ф.м.н., проф. Бойков И.В.

Программа одобрена методической комиссией ФВТ

Протокол № 10 от «03» 04 2019 года

Председатель методической комиссии ФВТ

к.т.н., доцент



Глотова Т.В.

**Сведения о переутверждении программы
на очередной учебный год и регистрации изменений**

Учебный год	Решение кафедры (№ протокола, дата)	Внесенные изменения	Подпись зав. кафедрой