

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета ВТ

  
(Подпись) техники

Фионова Л.Р.  
(Фамилия, инициалы)

« 3 » 2019 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ  
Б1.В.03 ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Направление подготовки 01.03.01 Математика

Направленность (профиль подготовки) Вычислительная математика и компьютерные науки

Квалификация выпускника – Бакалавр

Форма обучения очная

Пенза, 2019

## 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Проекционные методы» являются приобретение обучающимися знаний и умений по теории современных методов численного решения операторных уравнений и применение на практике этих методов для решения на ЭВМ различных задач, возникающих в приложениях к акустике, электродинамике и т.п.

Формируемые дисциплиной знания и умения готовят выпускника данной образовательной программы к выполнению следующих трудовых функций: А/01.5 «Осуществление проведения работ по обработке и анализу научно-технической информации и результатов исследований», А/02.5 «Осуществление выполнения экспериментов и оформления результатов исследований и разработок», А/03.5 «Подготовка элементов документации, проектов планов и программ проведения отдельных этапов работ» (профессиональный стандарт 40.011 «Специалист по научно-исследовательским и опытно-конструкторским разработкам», утвержденный приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от «4» марта 2014 г. № 121н).

## 2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата

Дисциплина «Проекционные методы» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений, Блока 1 «Дисциплины (модули)» и является одной из дисциплин, формирующих профессиональные знания и навыки, характерные для бакалавра по направлению подготовки 01.03.01 «Математика» направленности (профиля подготовки) «Вычислительная математика и компьютерные науки».

*Изучение данной дисциплины базируется на знаниях следующих дисциплин:*

- алгоритмы и алгоритмические языки; численные методы (в полном объеме);
- функциональный анализ; уравнения с частными производными (в полном объеме).

*Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:*

- численные методы решения интегральных уравнений, численные методы решения краевых задач, математические модели в науке и технике, суперкомпьютерное моделирование / параллельные алгоритмы;
- при выполнении и защите выпускной квалификационной работы.

## 3. Результаты освоения дисциплины «Проекционные методы»

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению:

Коды компетенции	Наименование компетенции	Индикатор достижения компетенции	В результате освоения дисциплины обучающийся должен:
ПК-3	Способен обосновывать актуальность, теоретическую и практическую значимость избранной темы научного исследования в области вычислительной математики	ПК-3.1. Осуществляет самостоятельный сбор данных, изучает, анализирует и обобщает научно-техническую информацию по тематике исследования в области вычислительной математики и компьютерных наук.	Знать: основные численные методы и алгоритмы решения математических задач из разделов – вариационные методы, проекционные методы, уравнения математической физики. Уметь: анализировать задачи в

	и компьютерных наук.		рамках избранной темы.
		ПК-3.2. Выявляет и формулирует актуальные научные задачи в собственной научно-исследовательской деятельности в области вычислительной математики и компьютерных наук.	Знать принципы построения программного обеспечения Уметь применять методы проектирования программного обеспечения для написания вычислительных программ. Владеть навыками разработки программного обеспечения.
ПК-4	Способен проводить исследование в области вычислительной математики и компьютерных наук на основе существующих методов и представлять результаты проведенного исследования научному сообществу в виде статьи и (или) доклада.	ПК-4.1. Обоснованно выбирает теоретические и практические методы решения сформулированных задач и применяет их в своей научно-исследовательской работе в области вычислительной математики и компьютерных наук.	Знать: цели и задачи проводимых исследований и методы их решения средствами вычислительной математики. Уметь: применять теорию проекционных методов для решения поставленной задачи; оформлять результаты проведенных исследований. Владеть: опытом проведения вычислительных экспериментов, обработки и анализа информации; представления результатов проведенных исследований.

#### 4. Структура и содержание дисциплины «Проекционные методы»

##### 4.1. Структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы, 144 часа.

№ п/п	Наименование разделов и тем дисциплины (модуля)	Семестр	Недели семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)						Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра)		
				Контактная работа				Самостоятельная работа		Форма промежуточной аттестации (по семестрам)		
				Всего	Лекция	Лабораторные занятия	Др. виды контакт. Работы	Всего	Подготовка к экзамену	Другие виды самостоятельной работы	Коллоквиум	Проверка лабораторных работ
1.	Раздел 1. Проекционные методы (ПМ).											
1.1.	Тема 1.1. Проекторы и их свойства. Проекционные методы; критерий сходимости.	6	1-2	6	2	4		6		6	4	1-2
1.2.	Тема 1.2. Сходимость ПМ для оператора $(S - K)$ .	6	3-4	6	2	4		6		6	4	3-4
1.3.	Тема 1.3. Метод коллокаций.	6	5-6	6	2	4		6		6	8	5-6
1.4	Тема 1.4. Метод Галеркина (МГ). Базисные и тестовые функции. Теорема о сходимости МГ для оператора $(I - K)$ .	6	7-8	6	2	4		6		6	8	7-8
1.5.	Тема 1.5. Коэрцитивные операторы (КО). Сходимость метода Галеркина для уравнения с КО.	6	9-10	6	2	4		6		6	12	9-20
2	Раздел 2. Аппроксимация и финитные функции	6										
2.1.	Тема 2.1. Простейшие кусочно-постоянные финитные функции	6	11-12	6	2	4		6		6	12	11-12
2.2.	Тема 2.2. Кусочно-линейные финитные функции на прямой	6	13-15	9	3	6		12		12	16	13-15
2.3.	Тема 2.3. Кусочно-линейные функции в двумерном случае	6	16-17	6	2	4		6		6	16	16-17
	<i>Иная контактная работа</i>			3			3					
	<i>Подготовка к экзамену</i>	6						36	36			
	Общая трудоемкость, в часах	6		<b>54</b>	17	34	3	<b>90</b>	36	54	Промежуточная аттестация	
											Форма	Семестр
											Экзамен	6

## 4.2. Содержание дисциплины

1. Проекторы и их свойства. Проекционные методы; критерий сходимости. Оператор проецирования на подпространство и его основные свойства. Формулировка проекционного метода. Условие аппроксимации. Определение сходимости проекционного метода. Критерий сходимости проекционного метода.

2. Сходимость проекционного метода для оператора  $(S - K)$ . Сходимость проекционного метода для оператора  $(I - K)$ . Формулировка и доказательство теоремы о сходимости проекционного метода для оператора  $(S - K)$ . Сходимость проекционного метода для оператора  $(I - K)$ .

3. Метод коллокаций. Формулировка метода коллокаций. О связи операторов интерполяции и проекционного оператора.

4. Метод Галеркина. Базисные и тестовые функции. Теорема о сходимости метода Галеркина для оператора  $(I - K)$ . МГ как важный случай проекционного метода в гильбертовых пространствах. О ранее доказанных теоремах сходимости проекционного метода. Сходимость метода Галеркина для оператора  $(I - K)$ . Обсуждение применимости метода Галеркина для численного решения интегральных уравнений Фредгольма 2 рода.

5. Коэрцитивные операторы. Определение и свойства коэрцитивных операторов. О связи эллиптичности, коэрцитивности и фредгольмовости операторов. Сходимость метода Галеркина для уравнения с КО.

6. Простейшие кусочно-постоянные финитные функции. Свойство аппроксимации в пространстве квадратично суммируемых функций. Применение для решения интегральных уравнений проекционными методами.

7. Кусочно-линейные финитные функции на прямой. Свойство аппроксимации в пространствах Соболева. Применение для решения интегральных уравнений проекционными методами.

8. Кусочно-постоянные и кусочно-линейные финитные функции в двумерном случае. Свойство аппроксимации в пространствах Лебега и Соболева. Применение для решения интегральных уравнений проекционными методами.

## 5. Образовательные технологии

Активные и интерактивные формы: лекции, лабораторные работы, коллоквиумы. В течение семестров студенты выполняют лабораторные работы, указанные преподавателем, готовят к защите отчеты о выполнении лабораторных работ.

Обучающиеся, из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья обеспечены электронными образовательными ресурсами в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья. Форма проведения текущей и промежуточной аттестации для студентов-инвалидов устанавливается с учетом индивидуальных психофизических особенностей (устно, письменно на компьютере, в формате тестирования и т.д.) и позволяют оценить достижения ими запланированных в основной образовательной программе результатов обучения и уровня сформированности всех заявленных компетенций. На экзамен приглашается сопровождающий, который обеспечивает техническое сопровождение студенту. При необходимости студенту-инвалиду предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене.

В целях реализации индивидуального подхода к обучению студентов, осуществляющих учебный процесс по собственной траектории в рамках индивидуального рабочего плана, изучение данной дисциплины базируется на следующих возможностях: обеспечение внеаудиторной работы со студентами в том числе в электронной образовательной среде с использованием соответствующего программного оборудования, дистанционных форм обучения, возможностей интернет-ресурсов, индивидуальных консультаций и т.д.

Другие виды контактной работы: консультации, подготовка к экзамену.

**6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.  
Оценочные средства для текущего контроля успеваемости,  
промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

В семестре предусмотрены коллоквиумы и лабораторные работы. Лабораторные работы и коллоквиумы оцениваются по пятибалльной системе.

**6.1. План самостоятельной работы студентов**

№ нед.	Тема	Вид самостоятельной работы	Задание	Рекомендуемая литература	Количество часов
1-2, бсем.	Проекторы и их свойства. Проекционные методы; критерий сходимости.	Подготовка к аудиторным занятиям, лабораторным работам и коллоквиумам	Изучить основные понятия теории проекционных методов. Разработать алгоритм решения операторного уравнения проекционным методом.	Смирнов Ю.Г. Проекционные методы. – Пенза, Изд-во ПГУ, 1998.	<b>6</b>
3-4, бсем.	Сходимость проекционного метода для оператора $(S - K)$ . Сходимость проекционного метода для оператора $(I - K)$ .	Подготовка к аудиторным занятиям, лабораторным работам и коллоквиумам	Изучить теоремы о сходимости проекционного метода для операторов $(S - K)$ и $(I - K)$ . Разработать алгоритм решения уравнения $(I - K)u = f$ проекционным методом.	Смирнов Ю.Г. Проекционные методы. – Пенза, Изд-во ПГУ, 1998.	<b>6</b>
5-6, бсем.	Метод коллокаций.	Подготовка к аудиторным занятиям, лабораторным работам и коллоквиумам	Изучить метод коллокаций. Разработать алгоритм решения ИУ методом коллокаций.	Смирнов Ю.Г. Проекционные методы. – Пенза, Изд-во ПГУ, 1998.	<b>6</b>
7-8, бсем.	Метод Галеркина. Базисные и тестовые функции. Теорема о сходимости метода Галеркина для оператора $(I - K)$ .	Подготовка к аудиторным занятиям, лабораторным работам и коллоквиумам	Изучить метод Галеркина. Разработать алгоритм решения ИУ методом коллокаций.	Смирнов Ю.Г. Проекционные методы. – Пенза, Изд-во ПГУ, 1998.	<b>6</b>
9-10, бсем.	Коэрцитивные операторы. Сходимость метода Галеркина для уравнения с К.О.	Подготовка к аудиторным занятиям, лабораторным работам и коллоквиумам	Изучить понятие коэрцитивного оператора, теорему о сходимости метода Галеркина для уравнения с К.О. Разработать алгоритм решения методом Галеркина уравнений с коэрцитивным оператором.	Смирнов Ю.Г. Проекционные методы. – Пенза, Изд-во ПГУ, 1998.	<b>6</b>
11-12,	Простейшие кусочно-постоянные фи-	Подготовка к аудиторным	Изучить определение и свойства ку-	Марчук Г.И. Методы вычислитель-	<b>6</b>

бсем.	нитные функции	занятиям, лабораторным работам и коллоквиумам	сочно-постоянных функций. Реализовать программно алгоритм генерирования равномерной сетки на отрезке прямой и вычисление базисных функций.	ной математики. - М., Лань, 2009	
13-15, бсем.	Кусочно-линейные финитные функции на прямой	Подготовка к аудиторным занятиям, лабораторным работам и коллоквиумам	Изучить определение и свойства кусочно-линейных функций. Реализовать программно алгоритм вычисления кусочно-линейных финитных базисных функций.	Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М., Лань, 2009	<b>12</b>
16-17, бсем.	Кусочно-линейные функции в двумерном случае	Подготовка к аудиторным занятиям, лабораторным работам и коллоквиумам	Изучить определение и свойства кусочно-линейных функций в двумерном случае. Реализовать программно алгоритм генерирования равномерной сетки на отрезке прямой и вычисление базисных функций.	Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М., Лань, 2009	<b>6</b>
7 сем.		Подготовка к экзамену			<b>36</b>

## 6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Студенты получают от преподавателя задание на повторение пройденного материала и самостоятельное изучение дополнительного материала по изучаемым темам лекционного курса. Преподаватель предлагает студентам литературу для самостоятельного изучения, а также выдает лабораторные задания.

Подготовка к лабораторным работам включает самостоятельное изучение необходимого теоретического материала, написание и отладку вычислительной программы, проведение вычислительных экспериментов (решение модельных и конкретных задач), подготовку отчета по лабораторной работе. Подготовка к коллоквиумам подразумевает самостоятельное изучение теоретического материала по курсу лекций и с использованием учебной литературы.

## 6.3. Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов

### *Контроль освоения компетенций*

№ п\п	Вид контроля	Контролируемые темы (разделы)	Компетенции, компоненты которых контролируются
1	коллоквиум, проверка лабо-	Общая схема метода Рунге. Классический метод Рунге. Метод Рунге в энергетических пространст-	ПК-3,4

	раторных работ, экзамен	вах. Естественные и главные краевые условия	
2	коллоквиум, проверка лабораторных работ, экзамен	Метод наименьших квадратов. Проекторы и их свойства. Проекционные методы; критерий сходимости.	ПК-3,4
3	коллоквиум, проверка лабораторных работ, экзамен	Сходимость проекционного метода для оператора $(S - K)$ . Сходимость проекционного метода для оператора $(I - K)$ . Метод коллокаций.	ПК-3,4
4	коллоквиум, проверка лабораторных работ, экзамен	Метод Галеркина. Базисные и тестовые функции. Теорема о сходимости метода Галеркина для оператора $(I - K)$ . Коэрцитивные операторы. Сходимость метода Галеркина для уравнения с К.О.	ПК-3,4

**Примерные списки вопросов для коллоквиумов:**

**Коллоквиум №1**

1. Формулировка метода наименьших квадратов. Сходимость метода.
2. Оператор проецирования на подпространство и его основные свойства.
3. Формулировка проекционного метода. Условие аппроксимации.
4. Определение сходимости ПМ. Критерий сходимости ПМ.

**Коллоквиум №2**

1. Формулировка и доказательство теоремы о сходимости ПМ для оператора  $(S - K)$ .
2. Сходимость проекционного метода для оператора  $(I - K)$ .
3. Формулировка МК.
4. О связи операторов интерполяции и проекционного оператора.

**Коллоквиум №3**

1. Метод Галеркина как важный случай проекционного метода в гильбертовых пространствах.
2. О ранее доказанных теоремах сходимости ПМ.
3. Сходимость МГ для оператора  $(I - K)$ .
4. Обсуждение применимости МГ для численного решения интегральных уравнений Фредгольма 2 рода.
5. Определение и свойства коэрцитивных операторов. О связи эллиптичности, коэрцитивности и фредгольмовости операторов.
6. Сходимость метода Галеркина для уравнения с КО.

**Коллоквиум №4**

1. Простейшие кусочно-постоянные финитные функции. Свойство аппроксимации в пространстве квадратично суммируемых функций.
2. Кусочно-линейные финитные функции на прямой. Свойство аппроксимации в пространствах Соболева.
3. Кусочно-постоянные и кусочно-линейные финитные функции в двумерном случае. Свойство аппроксимации в пространствах Лебега и Соболева.

**Примерные темы лабораторных работ (ЛР):**

**ЛР №1.** Решение интегрального уравнения Фредгольма на отрезке проекционным методом с выбором кусочно-постоянных базисных функций.

**ЛР №2.** Решение интегрального уравнения Фредгольма на отрезке проекционным методом с выбором кусочно-линейных базисных функций.



*ЛР №3.* Решение двумерного интегрального уравнения Фредгольма проекционным методом с выбором финитных базисных функций.

*ЛР №4.* Решение ОДУ проекционно-сеточным методом.

*ЛР №5.* Решение третьей краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка проекционно-сеточным методом.

*ЛР №6.* Решение задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка.

*ЛР №7.* Решение одномерного интегрального уравнения Фредгольма второго рода проекционным методом с выбором кусочно-линейных базисных функций.

*ЛР №8.* Решение параболического уравнения второго порядка проекционно-сеточным методом.

*ЛР №9.* Решение двумерного интегрального уравнения Фредгольма второго рода проекционным методом с выбором кусочно-линейных базисных функций.

*ЛР №10.* Решение объемного интегрального уравнения Фредгольма 2 рода методом коллокаций.

Материалы для проведения текущего контроля знаний и промежуточной аттестации составляют отдельный документ – Фонд оценочных средств по дисциплине «Проекционные методы»

Демонстрационные варианты оценочных средств для каждого вида контроля доступны в ЭИОС (<http://moodle.pnzgu.ru>) в разделе Оценочные средства по дисциплине в курсе «Проекционные методы».

## **7. Учебно-методическое и материально-техническое обеспечение дисциплины «Проекционные методы»**

а) учебная литература:

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М. Лань, 2011 ([https://e.lanbook.com/book/2025?category\\_pk=915#authors](https://e.lanbook.com/book/2025?category_pk=915#authors)).
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М., Лань, 2009 ([https://e.lanbook.com/book/255#book\\_name](https://e.lanbook.com/book/255#book_name)).
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа М.: Физматлит, 2009 ([https://e.lanbook.com/book/2206#book\\_name](https://e.lanbook.com/book/2206#book_name)).
4. Треногин В.А. Функциональный анализ. — М.: Физматлит, 2002 ([https://e.lanbook.com/book/2340#book\\_name](https://e.lanbook.com/book/2340#book_name)).
5. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. Лань, 2009 ([https://e.lanbook.com/book/245?category\\_pk=911#authors](https://e.lanbook.com/book/245?category_pk=911#authors)).
6. Смирнов Ю.Г. Проекционные методы. – Пенза, Изд-во ПГУ, 1998 (сайт каф. МСМ)

б) Интернет-ресурсы

1. <http://www.mccme.ru/free-books/> - Свободно распространяемые издания Московского Центра непрерывного математического образования.
2. <http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm> - Электронная физико-математическая библиотека EqWorld
3. <http://www.mathnet.ru/> - Общероссийский математический портал Math-Net.Ru
4. <http://elibrary.ru> - Научная электронная библиотека

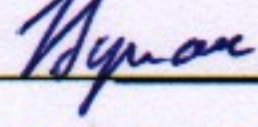
в) Программное обеспечение

1. Дистрибутив TeXLive макроязыка LATEX системы компьютерной вёрстки (<https://tug.org/texlive/> : свободно распространяемое программное обеспечение).
2. Система программирования Microsoft Visual Studio 2008 Express WithSP1 (свободно распространяемое программное обеспечение).

г) Другое материально-техническое обеспечение: компьютеры с доступом в сеть Internet для самостоятельной работы

Рабочая программа дисциплины Б1.В.03 «Проекционные методы» составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.01 «Математика», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от «10» января 2018 г. № 8.

Программу составили:

1. Цупак А.А., доцент каф. МСМ   
(Ф.И.О., должность, подпись)

2. \_\_\_\_\_  
(Ф.И.О., должность, подпись)

**Настоящая программа не может быть воспроизведена ни в какой форме без предварительного письменного разрешения кафедры-разработчика программы.**

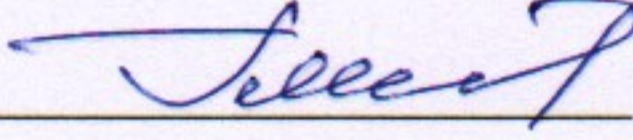
Программа одобрена на заседании кафедры МСМ

Протокол № 11 от « 29 » 06 2019 года

Зав. кафедрой МСМ \_\_\_\_\_  Смирнов Ю.Г.  
(подпись, Ф.И.О.)

Программа одобрена методической комиссией факультета ВТ

Протокол № 10 от « 3 » 07 2019 года

Председатель методической комиссии  
факультета ВТ \_\_\_\_\_  Глотова Т.В.  
(подпись) (Ф.И.О.)

**Сведения о переутверждении программы на очередной учебный год и регистрации изменений**

Учебный год	Решение кафедры (№ протокола, дата )	Внесенные изменения	Подпись зав. кафедрой