МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета ВТ

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации * федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пензенский государственный университет» Факультет вычислительной техники

_______________ Фионова Л.Р.
(Подпись) (Фамилия, инициалы)

«_3_» _07_ 2019 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
С1.О.09 ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Специальность 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

Направленность (специализация) Вычислительная математика и вычислительная механика

Квалификация выпускника – Математик. Механик. Преподаватель.

Форма обучения очная

Пенза, 2019

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Линейная алгебра» являются приобретение обучающимися знаний и умений по линейной алгебре, а также формирование математической культуры студентов, фундаментальная подготовка студентов в области линейной алгебры, овладение современным аппаратом линейной алгебры для дальнейшего использования в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания, умение использовать приобретенные знания в исследовательской работе и педагогической деятельности.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП специалитета

Дисциплина «Линейная алгебра» находится в обязательной части Блока 1 «Дисциплины (модули)» и является одной из дисциплин, формирующих профессиональные знания, умения и навыки, характерные для специалиста по специальности 01.05.01 «Фундаментальные математика и механика» направленности (специализации) «Вычислительная математика и вычислительная механика».

Изучение данной дисциплины базируется на знании курса «Алгебра» в объеме курса средней школы.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- дифференциальные уравнения и динамические системы, функции комплексного переменного, функциональный анализ и интегральные уравнения, оптимальное управление и вариационное исчисление, численные методы решения задач алгебры и анализа, численные методы решения задач линейной алгебры, физика;
- при выполнении и защите выпускной квалификационной работы.

3. Результаты освоения дисциплины «Линейная алгебра»

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению:

Коды компетенции	Наименование компетенции	Индикатор достижения компетенции (закрепленный за дисциплиной)	В результате освоения дисциплины обучающийся должен:
ОПК-1	Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики	ОПК-1.3. Решает задачи, актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики, используя сведения из области математических, естественных наук и информатики	**Знать:** методы решения задач линейной алгебры **Уметь:** решать задачи линейной алгебры **Владеть:** необходимым аппаратом и методологией линейной алгебры
ОПК-4	Способен использовать в педагогической деятельности научные основы знаний в сфере математики и механики	ОПК-4.1. Находит, анализирует и использует информацию в области фундаментальной математики и механики, необходимую для использования в педагогической деятельности	**Знать:** источники информации, необходимые для изучения дисциплины **Уметь:** пользоваться открытыми источниками и научными базами данных в сфере математики и механики **Владеть:** опытом использования научных основ знаний в сфере математики и механики

		ОПК-4.2. Понимает научные основы математики и механики, их изменения в контексте исторического развития математики и механики	**Знать:** основные положения линейной алгебры **Уметь:** доказывать теоретические утверждения линейной алгебры **Владеть:** опытом использования знаний по линейной алгебре для решения задач математики и механики
		ОПК-4.3. Применяет научные основы знаний в сфере математики и механики в педагогической деятельности, используя в т.ч. инновационные технологии	**Знать:** математические основы методологии линейной алгебры **Уметь:** представлять широкой аудитории классические и новые результаты в области линейной алгебры, в том числе с использованием инновационных технологий **Владеть:** аппаратом линейной алгебры, методами решения задач и доказательства утверждений, навыками применения аппарата линейной алгебры в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания

4. Структура и содержание дисциплины «Линейная алгебра»

4.1. Структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 16 зачетных единиц, 576 часов.

№ п/п	Наименование разделов и тем дисциплины	Семестр	Недели семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)							Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации	
				Контактная работа				Самостоятельная работа				
				Всего	Лекция	Практические занятия	Др. виды контакт. работы	Всего	Подготовка к экзамену	Другие виды самостоятельной работы	Коллоквиум	Проверка контрольных работ
1.	Раздел 1. Комплексные числа	1	1-4									
	Тема 1.1. Комплексные числа в алгебраической форме	1	1	5	2	3		1		1	8	8
	Тема 1.2. Развитые формы комплексного числа	1	2	5	2	3		1		1	8	8
	Тема 1.3. Корень *n*-ой степени из комплексного числа	1	3	5	2	3		1		1	8	8
	Тема 1.4. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел	1	4	5	2	3		2		2	8	8
2.	Раздел 2. Матрицы и действия над ними	1	5-8									
	Тема 2.1. Матрицы и матричные операции	1	5	5	2	3		1		1	8	8
	Тема 2.2. Основные свойства матричных операций	1	6	5	2	3		1		1	8	8
	Тема 2.3. Детерминанты квадратных матриц	1	7	5	2	3		1		1	8	8
	Тема 2.4. Основные свойства детерминантов	1	8	5	2	3		2		2	8	8
3.	Раздел 3. Системы линейных алгебраических уравнений	1	9-15									
	Тема 3.1. Основные понятия и определения теории линейных систем	1	9	5	2	3		1		1	17	17
	Тема 3.2. Системы Крамера и их решение	1	10	5	2	3		1		1	17	17
	Тема 3.3. Метод Гаусса	1	11	5	2	3		1		1	17	17
	Тема 3.4. Ранг матрицы и его вычисление	1	12-13	10	4	6		1		1	17	17
	Тема 3.5. Обращение матриц	1	14-15	10	4	6		2		2	17	17
4.	Раздел 4. Полная проблема собственных значений	1	16-17	10	4	6		2,3		2,3	17	17
	Иная контактная работа	1		4,7			4,7					
	Подготовка к экзамену	1						36	36			
	Общая трудоемкость, в часах	1		**89,7**	**34**	**51**	**4,7**	**54,3**	**36**	**18,3**		
5.	Раздел 5. Алгебра полиномов	2	1-2									

	Тема 5.1. Полиномы над числовым полем *F*.	2	1	2	1	1		0,5		0,5	8	8
	Тема 5.2. Приводимость и делимость полиномов	2	1	3	1	2		0,5		0,5	8	8
	Тема 5.3. Алгоритм Евклида для целых чисел и многочленов.	2	2	2	1	1		0,5		0,5	8	8
	Тема 5.4. Взаимно простые полиномы.	2	2	3	1	2		0,5		0,5	8	8
6.	Раздел 6. Корни полиномов	2	3-4									
	Тема 6.1. Корни полиномов и разложение на множители.	2	3	2	1	1		0,5		0,5	8	8
	Тема 6.2. Производный полином.	2	3	3	1	2		0,5		0,5	8	8
	Тема 6.3. Метод и схема Горнера.	2	4	5	2	3		0,5		0,5	8	8
7.	Раздел 7. Симметрические и эрмитовы, ортогональные и унитарные матрицы	2	5-6									
	Тема 7.1. Унарные операции над матрицами	2	5	2	1	1		0,5		0,5	8	8
	Тема 7.2. Ортогональные матрицы. Группа ортогональных матриц	2	5	3	1	2		0,5		0,5	8	8
	Тема 7.3. Унитарные матрицы. Группа унитарных матриц	2	6	2	1	1		0,5		0,5	8	8
	Тема 7.4. Полная проблема собственных значений эрмитовых матриц	2	6	3	1	2		1		1	8	8
8.	Раздел 8. Линейные и квадратичные формы	2	7-10									
	Тема 8.1. Линейные формы: основные понятия и определения	2	7	2	1	1		0,5		0,5	8	8
	Тема 8.2. Квадратичные формы: основные понятия и определения	2	7	3	1	2		0,5		0,5	8	8
	Тема 8.3. Приведение квадратичных форм к каноническому и нормальному видам	2	8	2	1	1		1		1	8	8
	Тема 8.4. Ранг произведения матриц, ранг квадратичной формы. Закон инерции квадратичных форм над полем действительных чисел	2	8	3	1	2		0,5		0,5	8	8
	Тема 8.5. LDR- разложение	2	9	2	1	1		0,5		0,5	17	17
	Тема 8.6. Приведение квадратичных форм к каноническому виду посредством замены переменных с унитреугольной матрицей. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичных форм	2	9	3	1	2		0,5		0,5	17	17
	Тема 8.7. Ортогональное преобразование квадратичной формы к каноническому виду	2	10	2	1	1		0,5		0,5	17	17
	Тема 8.8. Одновременное приведение двух квадратичных форм к каноническому виду	2	10	3	1	2		0,5		0,5	17	17
9.	Раздел 9. Эрмитовы формы	2	11-12									
	Тема 9.1. Эрмитовы формы – аналог квадратичных форм	2	11	2	1	1		0,5		0,5	17	17
	Тема 9.2. Приведение эрмитовой формы к каноническому виду посредством замены переменных с унитреугольной матрицей. Положительно определенные эрмитовы формы	2	11	3	1	2		0,5		0,5	17	17
	Тема 9.3. Унитарное преобразование эрмитовой формы к каноническому виду	2	12	2	1	1		0,5		0,5	17	17
	Тема 9.4. Одновременное приведение двух эрмитовых форм к каноническому виду	2	12	3	1	2		0,5		0,5	17	17
10.	Раздел 10. Полиномиальные матрицы (λ -матрицы) и матричные полиномы	2	13-16									
	Тема 10.1. Полиномиальные матрицы и приведение λ -матрицы к каноническому виду	2	13	2	1	1		1		1	17	17
	Тема 10.2. Инвариантные множители λ -матрицы	2	13	3	1	2		0,5		0,5	17	17
	Тема 10.3. Унимодулярные λ -матрицы	2	14	2	1	1		0,5		0,5	17	17
	Тема 10.4. Матричные полиномы	2	14	3	1	2		0,5		0,5	17	17
	Тема 10.5. Подобие числовых матриц	2	15	2	1	1		0,5		0,5	17	17
	Тема 10.6. Жордановы матрицы и их свойства	2	15	3	1	2		0,8		0,8	17	17
	Тема 10.7. Аннулирующий полином. Минимальный полином	2	16	2	1	1		0,5		0,5	17	17
	Тема 10.8. Минимальный полином как инвариантный множитель, теорема Гамильтона-Кэли	2	16	3	1	2		0,5		0,5	17	17
11.	Раздел 11. Группа подстановок	2	17	5	2	3		1		1	17	17

	Иная контактная работа	2		4,7			4,7					
	Подготовка к экзамену	2						36	36			
	Общая трудоемкость, в часах	2		**89,7**	**34**	**51**	**4,7**	**54,3**	**36**	**18,3**		
12.	Раздел 12. Линейные пространства над полем вещественных или комплексных чисел	3	1-3									
	Тема 12.1. Аксиомы линейного пространства и простейшие (важнейшие) теоремы	3	1	4	2	2		2		2	8	8
	Тема 12.2. Феномен конечной размерности линейного пространства	3	2	4	2	2		2		2	8	8
	Тема 12.3. Подпространства линейных пространств. Линейные оболочки	3	3	4	2	2		2		2	8	8
13.	Раздел 13. Прямое произведение пространств и пряма сумма подпространств	3	4-6									
	Тема 13.1. Прямое произведение линейных пространств	3	4	4	2	2		2		2	8	8
	Тема 13.2. Сумма подпространств линейного пространства	3	5	4	2	2		2		2	8	8
	Тема 13.3. Прямая сумма подпространств	3	6	4	2	2		2		2	8	8
14.	Раздел 14. Нормированные пространства	3	7-8									
	Тема 14.1. Неравенства общематематического значения	3	7	4	2	2		2		2	8	8
	Тема 14.2. Нормированные линейные пространства над числовым полем F	3	8	4	2	2		2		2	8	8
15.	Раздел 15. Евклидовы пространства	3	9-11									
	Тема 15.1. Скалярное умножение в линейном пространстве; евклидово пространство	3	9	4	2	2		2		2	17	17
	Тема 15.2. Ортогонализация базиса в евклидовом пространстве	3	10	2	1	1		1		1	17	17
	Тема 15.3. Матрица Грама	3	10	2	1	1		1		1	17	17
	Тема 15.4. Изоморфизм евклидовых пространств	3	11	2	1	1		1		1	17	17
	Тема 15.5. Ковариантные координаты векторов в евклидовом пространстве	3	11	2	1	1		2		2	17	17
16.	Раздел 16. Унитарные пространства	3	12									
	Тема 16.1. Скалярное умножение в комплексном линейном пространстве; унитарное пространство	3	12	2	1	1		1		1	17	17
	Тема 16.2. Изменение базиса унитарного пространства; ковариантные координаты	3	12	2	1	1		1		1	17	17
17.	Раздел 17. Линейные операторы и функционалы	3	13-14									
	Тема 17.1. Линейные операторы и действия над ними	3	13	2	1	1		1		1	17	17
	Тема 17.2. Линейные операторы в конечномерных пространствах	3	13	2	1	1		1		1	17	17
	Тема 17.3. Обратимость линейного оператора	3	14	4	2	2		2		2	17	17
18.	Раздел 18. Полная проблема собственных значений	3	15-17									
	Тема 18.1. Инвариантные подпространства и собственные векторы	3	15	4	2	2		2		2	17	17
	Тема 18.2. Расщепление линейного оператора	3	16	2	1	1		1		1	17	17
	Тема 18.3. Нильпотентные операторы	3	16	2	1	1		1,3		1,3	17	17
	Тема 18.4. Жорданов базис линейного оператора	3	17	4	2	2		2		2	17	17
	Иная контактная работа	3		4,7			4,7					
	Подготовка к экзамену	3						36	36			
	Общая трудоемкость, в часах	3		**72,7**	**34**	**34**	**4,7**	**71,3**	**36**	**35,3**		
19.	Раздел 19. Линейные, билинейные, полуторалинейные функционалы	4	1-3									
	Тема 19.1. Линейные функционалы (основные понятия)	4	1	5	2	3		1		1	8	8
	Тема 19.2. Функционалы на сопряженном пространстве L^*	4	2	2	1	1		0,5		0,5	8	8
	Тема 19.3. Билинейные функционалы	4	2	3	1	2		0,5		0,5	8	8
	Тема 19.4. Квадратичные функционалы	4	3	2	1	1		0,5		0,5	8	8

	Тема 19.5. Полуторалинейные и эрмитовы функционалы	4	3	3	1	2		0,5		0,5	8	8
20.	Раздел 20. Сопряженные и самосопряженные операторы	4	4-7									
	Тема 20.1. Сопряженные операторы в унитарном (евклидовом) пространстве	4	4	5	2	3		1		1	8	8
	Тема 20.2. Нормальные операторы	4	5	2	1	1		0,5		0,5	8	8
	Тема 20.3. Унитарные операторы	4	5	3	1	2		0,5		0,5	8	8
	Тема 20.4. Самосопряженные операторы	4	6	2	1	1		0,5		0,5	8	8
	Тема 20.5. Положительные операторы; корень из оператора	4	6	3	1	2		0,5		0,5	8	8
	Тема 20.6. Сингулярная пара базисов	4	7	2	1	1		0,5		0,5	8	8
	Тема 20.7. Полярное разложение оператора (линейного преобразования)	4	7	3	1	2		0,5		0,5	8	8
21.	Раздел 21. Линейные отображения в евклидовом пространстве	4	8-9									
	Тема 21.1. Самосопряженность в евклидовом пространстве	4	8	5	2	3		1		1	8	8
	Тема 21.2. Простейший вид матрицы линейного оператора пространств малой размерности	4	9	2	1	1		0,5		0,5	17	17
	Тема 21.3. Простейший вид матрицы линейного оператора n-мерного евклидова пространства	4	9	3	1	2		0,5		0,5	17	17
22.	Раздел 22. Нормы линейных операторов	4	10-13									
	Тема 22.1. Нормы линейного оператора	4	10	5	2	3		1		1	17	17
	Тема 22.2. Спектральная норма линейного оператора	4	11	2	1	1		1		1	17	17
	Тема 22.3. Евклидова норма матрицы и ее свойства	4	11	3	1	2		0,5		0,5	17	17
	Тема 22.4. Экстремальные свойства собственных значений самосопряженного оператора	4	12	5	2	3		1		1	17	17
	Тема 22.5. Линейные операторные уравнения в унитарных пространствах	4	13	5	2	3		1		1	17	17
23.	Раздел 23. Основы линейной многомерной геометрии	4	14-17									
	Тема 23.1. Аффинное пространство над числовым полем F	4	14	5	2	3		0,8		0,8	17	17
	Тема 23.2. Аффиннизируемость и линеаризируемость; размерность, изоморфизм линейных пространств	4	15	5	2	3		1		1	17	17
	Тема 23.3. Аффинные системы координат (АСК)	4	16	2	1	1		1		1	17	17
	Тема 23.4. Линейные многообразия аффинных пространств	4	16	3	1	2		1		1	17	17
	Тема 23.5. Евклидовы аффинные пространства	4	17	5	2	3		1		1	17	17
	Иная контактная работа	4		4,7			4,7					
	Подготовка к экзамену	4						36	36			
	Общая трудоемкость, в часах	4		**89,7**	**34**	**51**	**4,7**	**54,3**	**36**	**18,3**		
	Общая трудоемкость, в часах			**341,8**	**136**	**187**	**18,8**	**234,2**	**144**	**90,2**		

Промежуточная аттестация	
Форма	Семестр
Экзамен	*1,2,3,4*

4.2. Содержание дисциплины

1. Понятие комплексного числа, действительной и мнимой части, модуля и аргумента, изображение на плоскости. Алгебраическая, показательная и тригонометрическая форма комплексного числа. Операции над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах. Возведение в степень и извлечение корня.
2. Определение матрицы, виды матриц, алгебраические операции над матрицами. Понятие детерминанта матрицы, свойства.
3. Основные понятия и определения теории линейных систем. Системы Крамера и их решение. Применение элементарных преобразований матриц для анализа и решения линейных систем. Кортеж линейных систем и его решение методом Гаусса; матричные уравнения. Вычисление детерминанта матрицы методом элементарных преобразований. Детерминанты матриц специального вида. Применение элементарных преобразований к произвольной матрице над числовым полем F. ЛЗ и ЛНЗ матриц-столбцов (строк). Инвариантность ЛЗ-ЛНЗ. Ранги матрицы. Вычисление ранга матрицы. Применение ранга матрицы к анализу разрешимости матричных уравнений (теорема Кронекера – Капелли). Правая и левая обратные матрицы и нахождение их методом Гаусса. Обратная матрица и нахождение ее методом Гаусса. Выражение элементов обратной матрицы через миноры исходной матрицы. Элементарные преобразования матрицы как матричные умножения
4. Собственные числа и собственные векторы квадратной матрицы, характеристическое уравнение, бесконечность множества собственных векторов, ЛНЗ собственных векторов, нахождение собственных векторов, полная проблема собственных значений.
5. Определение полинома и его степени. Действия над полиномами, степени полиномов при сложении и умножении. Критерий обратимости полинома. Деление с остатком. Делитель полинома. Определение приводимости/ неприводимости полинома. Делимость полиномов и ее свойства. НОД двух полиномов. Алгоритм Евклида для многочленов. Взаимно простые полиномы и их свойства. Критерий взаимной простоты. НОД нескольких полиномов.
6. Определение корня и остатка полинома, кратные корни. Разложение полинома в произведение неприводимых над полем $\mathbb{C}$. Разложение полинома в произведение неприводимых над полем $\mathbb{R}$. Дифференцирование в кольце полиномов. Простые и кратные корни полиномов. Обнаружение кратных корней. Понижение степени уравнения, имеющего кратные корни. Метод и схема Горнера.
7. Транспонирование, комплексное сопряжение матрицы, основные свойства комплексного сопряжения. Симметризация, свойства симметризации матрицы. Симметрическая матрица, критерий симметрической матрицы. Альтернация, свойства альтернации матрицы. Кососимметрическая матрица, критерий кососимметрической матрицы. Эрмитово сопряжение матрицы, свойства. Ортогональность и нормируемость столбцов, строк с действительными коэффициентами. Определение ортогональной матрицы, детерминант ортогональной матрицы. Группа ортогональных матриц. Ортогональность и нормированность столбцов, строк с комплексными коэффициентами. Определение унитарной матрицы. Детерминант унитарной матрицы. Группа унитарных матриц. Собственные значения и собственные векторы эрмитовой матрицы. Собственные векторы симметрической вещественной матрицы.
8. Определение линейной формы. Действия над линейными формами. Линейная зависимость/ независимость линейных форм. Канонический базис пространства линейных форм. Определение квадратичной формы. Положительная, отрицательная, неопределенная квадратичная форма. Инвариантность положительной определенности. Приведение квадратичной формы к каноническому и нормальному видам. Приведение квадратичной формы к нормальному виду над полем $\mathbb{C}$. Приведение квадратичной формы к

нормальному виду над полем $\mathbb{R}$. Оценка ранга произведения матриц. Формула ранга произведения двух матриц. Ранг матрицы квадратичной формы, ранг квадратичной формы. Закон инерции квадратичных форм. Угловые субматрицы и угловые миноры. LDR-разложение. Критерий LDR-разложимости. Выражение элементов диагональной матрицы LDR-разложения через угловые миноры. LDR-разложение симметрической матрицы. Критерий приводимости квадратичных форм к каноническому виду. Критерий Сильвестра. Приведение квадратичной формы к каноническому виду посредством замены переменных с ортогональной матрицей. Подобные матрицы. Основные свойства подобия. Теорема об одновременном приведении двух квадратичных форм к каноническому виду.

9. Эрмитовы формы: определение и простые свойства. Приведение эрмитовой формы к каноническому виду. Приведение эрмитовой формы к нормальному виду над полем $\mathbb{C}$. LDR-разложение эрмитовой матрицы, критерий. Положительно определенные эрмитовы формы, критерий, критерий Сильвестра. Унитарное преобразование эрмитовой формы к каноническому виду. Одновременное приведение двух эрмитовых форм к каноническому виду.
10. Определение полиномиальной матрицы. Элементарные преобразования λ -матриц над числовым полем. Эквивалентность λ -матриц. Канонические λ -матрицы. Приведение λ -матрицы к каноническому виду. Инвариантные множители λ -матрицы, единственность канонической формы λ-матрицы. Унимодулярные λ -матрицы. Элементарные λ -матрицы. Сведение элементарных преобразований к матричному умножению. Критерий эквивалентности двух λ -матриц. Матричные полиномы: определение и свойства. Деление матричных полиномов с остатком. Подобие числовых матриц: определение и простейшие свойства. Основной критерий подобия числовых матриц. Жорданова клетка. Канонический вид характеристической матрицы для жордановой клетки. Канонический вид характеристической матрицы $J - \lambda E$ для жордановой матрицы J. Критерий подобия жордановых матриц. Матричный корень полинома. Теорема Гамильтона-Кэли.
11. Подстановки и перестановки, циклы в теории подстановок. Выражение детерминанта матрицы через все элементы самой матрицы.
12. Линейное пространство. Простейшие теоремы линейного пространства. Определение линейной зависимости (независимости) системы векторов. Свойства. Критерий линейной зависимости. Базис и размерность линейного пространства. Изменение координат вектора при переходе от одного базиса к другому. Изоморфизм линейного пространства. Критерий изоморфности двух линейных пространств. Определение подпространства линейного пространства. Линейная оболочка. Размерность линейной оболочки. Теорема о размерности подпространства. Связь между базисами пространства и подпространства.
13. Прямое произведение двух линейных пространств. Базис и размерность прямого произведения конечномерных пространств. Сумма подпространств. Размерности подпространств, их суммы, пересечения. Прямая сумма подпространств. Критерий прямой суммы по единственности разложения. Разложение конечномерного линейного пространства в прямую сумму своих подпространств.
14. Определение нормы и нормированного пространства. Норма на прямом произведении двух нормированных линейных пространств.
15. Скалярное умножение в линейном пространстве, евклидово пространство. Базис и размерность евклидова пространства. Ортогональный, нормированный,

ортонормированный базис евклидова пространства. Алгоритм процесса ортогонализации. Изоморфизм евклидовых пространств.

16. Скалярное умножение и его простейшие свойства в комплексном пространстве. Определение унитарного пространства. Угол между ненулевыми векторами в унитарном пространстве, ортогональные векторы. Ортогональный, нормированный, ортонормированный базис, скалярное произведение векторов через их координаты в унитарном пространстве. Матрица Грамма в унитарном пространстве, свойства. Переход к новому базису в унитарном пространстве. Изоморфизм унитарных пространств.
17. Определение линейного оператора и линейного функционала. Действия над линейными операторами. Тождественный оператор. Умножение операторов, свойства. Ядро и образ линейного оператора. Матрица линейного оператора. Изменение матрицы линейного оператора при изменении базисов линейных пространств. Детерминант и ранг оператора. Дефект матрицы, дефект оператора. Матрицы суммы и произведения операторов. Обратимый и обратный операторы. Матрица обратного оператора. Критерии обратимости «функциональный», «детерминантный» и «ядерный».
18. Определение инвариантного подпространства. Инвариантность пересечения и суммы подпространств. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический полином и характеристическое уравнение линейного оператора. Критерий собственного значения. Спектр линейного оператора. Собственное подпространство. Полиномиальный оператор, коммутирование полиномиальных операторов. Корень полинома. Операторный полином. Теорема Гамильтона-Кэли. Индуцированный оператор. Расщепление линейного оператора. Нильпотентный оператор, нильпотентная матрица. Критерий нильпотентности. Ядра степеней нильпотентного оператора. Жорданов базис нильпотентного оператора. Жорданов базис оператора с единственным собственным значением. Жорданов базис линейного оператора.
19. Линейный функционал. Сопряженное пространство. Размерность сопряженного пространства. Сопряженный базис. Второе сопряженное пространство. Канонический изоморфизм пространств $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^{**}$. Свертка, результат свертки. Билинейный функционал. Ранг билинейного функционала. Симметричный билинейный функционал. Кососимметричный билинейный функционал. Невырожденный и вырожденный билинейный функционал. Критерий невырожденности билинейного функционала. Квадратичный функционал. Полярный функционал, полярная форма. Специальное представление линейного функционала в евклидовом пространстве. Полуторалинейный функционал. Эрмитово - сопряженные полуторалинейные функционалы. Эрмитов функционал. Полярный функционал и полярная форма. Критерий эрмитово-сопряженности. Специальное представление линейного функционала в унитарном пространстве
20. Сопряженный оператор. Свойства сопряжения. Ядра и образы сопряженных операторов. Нормальный оператор. Критерий нормальности оператора. Определение и характерные свойства унитарного оператора, нормальность. Определение самосопряженного оператора, эрмитов и симметричный самосопряженный оператор. Представление произвольного линейного оператора в виде комбинации эрмитовых. Критерий самосопряженности произведения самосопряженных операторов. Критерий самосопряженности оператора. Нормальность самосопряженности оператора. Вещественность собственных значений самосопряженного оператора. Собственные векторы самосопряженного оператора. Положительный (неотрицательный) самосопряженный оператор. Корень из положительного оператора. Эрмитовость и неотрицательность операторных произведений AA^*, A^*A. Специальные ортонормированные базисы. Сингулярная пара базисов. Полярное разложение оператора. Разложение, двойственное «полярному». Полярное разложение невырожденного оператора.
21. Симметричный оператор в евклидовом пространстве. Ортогональный оператор, эквивалентность свойств. Конформность ортогонального преобразования. Собственные и несобственные ортогональные преобразования. Простейший вид матрицы линейного

оператора одномерного и двумерного пространств. Простейший вид матрицы ортогонального преобразования в двумерном пространстве. Инвариантность ортогонального дополнения. Простейший вид матрицы линейного оператора. Простое отражение и простое вращение в евклидовом пространстве.

22. Согласованная норма и ее спектральное свойство. Подчиненная норма и ее экстремальное свойство. Норма произведения. Норма в унитарном (евклидовом) пространстве. Спектральная норма. Связь спектральной нормы оператора A со спектром оператора (A^*A). Инвариантность спектральной нормы при унитарных преобразованиях. Евклидова норма матрицы, свойства. Инвариантность евклидовой нормы матрицы оператора относительно ортонормированных базисов. Лемма о спектре самосопряженного оператора. Максиминное свойство собственных значений. Сравнение спектров самосопряженных операторов. Линейные операторные уравнения в унитарных пространствах. Сопряженное уравнение, простое логическое правило. Альтернатива Фредгольма. Нормальное решение.
23. Определение аффинного пространства, аксиомы. Простейшие теоремы теории аффинных пространств. Каноническая аффиннизируемость линейного пространства. Каноническая линеаризируемость носителя аффинного пространства с отмеченной точкой. Размерность аффинного пространства. Аффинные системы координат. Линейное многообразие и его размерность. Евклидовы аффинные пространства.

5. Образовательные технологии

Активные и интерактивные формы: лекции, практические занятия, контрольные работы, коллоквиумы, экзамены. В течение семестров студенты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому семинару. В каждом семестре проводятся контрольные работы и коллоквиумы (или письменные тесты).

Обучающееся, из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья обеспечены электронными образовательными ресурсами в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья. Форма проведения текущей и промежуточной аттестации для студентов-инвалидов устанавливается с учетом индивидуальных психофизических особенностей (устно, письменно на компьютере, в формате тестирования и т.д.) и позволяют оценить достижения ими запланированных в основной образовательной программе результатов обучения и уровня сформированности всех заявленных компетенций. На экзамен приглашается сопровождающий, который обеспечивает техническое сопровождение студенту. При необходимости студенту-инвалиду предоставляется дополнительное время для подготовки ответа на экзамене.

Другие виды контактной работы: консультации, подготовка к экзамену.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

Контрольные, коллоквиумы оцениваются по балльной системе. Экзамены оцениваются по системе: неудовлетворительно, удовлетворительно, хорошо, отлично. На практических занятиях контроль осуществляется при ответе у доски и при проверке домашних заданий. В течение каждого семестра студенты разбирают и решают задачи, указанные преподавателем к каждому семинару, разбирают и повторяют основные понятия и теоремы, доказанные на лекциях. В каждом семестре предусмотрены коллоквиумы и контрольные работы.

6.1. План самостоятельной работы студентов

№ нед.	Тема	Вид самостоятельной работы	Задание	Рекомендуемая литература	Количество часов

1-4, 1 сем.	Комплексные числа	Подготовка к аудиторным занятиям	Закрепить знания по теме «Комплексные числа», изучив дополнительную литературу	Окунев Л. Я. Высшая алгебра: учеб. - СПб: Лань, 2009. — 336 с.	**5**
5-8, 1 сем.	Матрицы и действия над ними	Подготовка к аудиторным занятиям	Закрепить знания по теме «Матрицы и действия над ними», изучив дополнительную литературу	Окунев Л. Я. Высшая алгебра: учеб. - СПб: Лань, 2009. — 336 с.	**5**
9-15, 1 сем.	Системы линейных алгебраических уравнений	Подготовка к аудиторным занятиям	Закрепить знания по теме «Системы линейных алгебраических уравнений», изучив дополнительную литературу	Окунев Л. Я. Высшая алгебра: учеб. - СПб: Лань, 2009. — 336 с.	**6**
16-17, 1 сем.	Полная проблема собственных значений	Подготовка к аудиторным занятиям	Закрепить знания по теме «Полная проблема собственных значений», изучив дополнительную литературу	Окунев Л. Я. Высшая алгебра: учеб. - СПб: Лань, 2009. — 336 с.	**2,3**
1 сем.		Подготовка к экзамену			**36**
1-2, 2 сем.	Алгебра полиномов	Подготовка к аудиторным занятиям	Закрепить знания по теме «Алгебра полиномов», изучив дополнительную литературу	Окунев Л. Я. Высшая алгебра: учеб. - СПб: Лань, 2009. — 336 с.	**2**
3-4, 2 сем.	Корни полиномов	Подготовка к аудиторным занятиям	Закрепить знания по теме «Корни полиномов», изучив дополнительную литературу	Окунев Л. Я. Высшая алгебра: учеб. - СПб: Лань, 2009. — 336 с.	**1,5**
5-6, 2 сем.	Симметрические и эрмитовы, ортогональные и унитарные матрицы	Подготовка к аудиторным занятиям	Закрепить знания по теме «Симметрические и эрмитовы, ортогональные и унитарные матрицы», изучив дополнительную литературу	Окунев Л. Я. Высшая алгебра: учеб. - СПб: Лань, 2009. — 336 с.	**2,5**
7-10, 2 сем.	Линейные и квадратичные формы	Подготовка к аудиторным занятиям	Закрепить знания по теме «Линейные и квадратичные формы», изучив	Курош А. Г. Курс высшей алгебры. - М.: Лань, 2013.—432 с.	**4,5**

			дополнительную литературу		
11-12, 2 сем.	Эрмитовы формы	Подготовка к аудиторным занятиям	Закрепить знания по теме «Эрмитовы формы», изучив дополнительную литературу	Курош А. Г. Курс высшей алгебры. - М.: Лань, 2013.—432 с.	**2**
13-16, 2 сем.	Полиномиальные матрицы и матричные полиномы	Подготовка к аудиторным занятиям	Закрепить знания по теме «Полиномиальные матрицы и матричные полиномы», изучив дополнительную литературу	Окунев Л. Я. Высшая алгебра: учеб. - СПб: Лань, 2009. — 336 с.	**4,8**
17, 2 сем.	Группа подстановок	Подготовка к аудиторным занятиям	Закрепить знания по теме «Группа подстановок», изучив дополнительную литературу	Окунев Л. Я. Высшая алгебра: учеб. - СПб: Лань, 2009. — 336 с.	**1**
2 сем.		Подготовка к экзамену			**36**
1-3, 3 сем.	Линейные пространства над полем вещественных или комплексных чисел	Подготовка к аудиторным занятиям	Закрепить знания по теме «Линейные пространства над полем вещественных или комплексных чисел», изучив дополнительную литературу	Курош А. Г. Курс высшей алгебры. - М.: Лань, 2013.—432 с.	**6**
4-6, 3 сем.	Прямое произведение пространств и пряма сумма подпространств	Подготовка к аудиторным занятиям	Закрепить знания по теме «Прямое произведение пространств и пряма сумма подпространств», изучив дополнительную литературу	Курош А. Г. Курс высшей алгебры. - М.: Лань, 2013.—432 с.	**6**
7-8, 3 сем.	Нормированные пространства	Подготовка к аудиторным занятиям	Закрепить знания по теме «Нормированные пространства», изучив дополнительную литературу	Курош А. Г. Курс высшей алгебры. - М.: Лань, 2013.—432 с.	**4**
9-11, 3 сем.	Евклидовы пространства	Подготовка к аудиторным занятиям	Закрепить знания по теме «Евклидовы пространства», изучив	Курош А. Г. Курс высшей алгебры. - М.: Лань, 2013.—432 с.	**7**

			дополнительную литературу		
12, 3 сем.	Унитарные пространства	Подготовка к аудиторным занятиям	Закрепить знания по теме «Унитарные пространства», изучив дополнительную литературу	Курош А. Г. Курс высшей алгебры. - М.: Лань, 2013.—432 с.	**2**
13-14, 3 сем.	Линейные операторы и функционалы	Подготовка к аудиторным занятиям	Закрепить знания по теме «Линейные операторы и функционалы», изучив дополнительную литературу	Окунев Л. Я. Высшая алгебра: учеб. - СПб: Лань, 2009. — 336 с.	**4**
15-17, 3 сем.	Полная проблема собственных значений	Подготовка к аудиторным занятиям	Закрепить знания по теме «Полная проблема собственных значений», изучив дополнительную литературу	Окунев Л. Я. Высшая алгебра: учеб. - СПб: Лань, 2009. — 336 с.	**6,3**
3 сем.		Подготовка к экзамену			**36**
1-3, 4 сем.	Линейные, билинейные, полуторалинейные функционалы	Подготовка к аудиторным занятиям	Закрепить знания по теме «Линейные, билинейные, полуторалинейные функционалы», изучив дополнительную литературу	Окунев Л. Я. Высшая алгебра: учеб. - СПб: Лань, 2009. — 336 с.	**3**
4-7, 4 сем.	Сопряженные и самосопряженные операторы	Подготовка к аудиторным занятиям	Закрепить знания по теме «Сопряженные и самосопряженные операторы», изучив дополнительную литературу	Окунев Л. Я. Высшая алгебра: учеб. - СПб: Лань, 2009. — 336 с.	**4**
8-9, 4 сем.	Линейные отображения в евклидовом пространстве	Подготовка к аудиторным занятиям	Закрепить знания по теме «Линейные отображения в евклидовом пространстве», изучив дополнительную литературу	Окунев Л. Я. Высшая алгебра: учеб. - СПб: Лань, 2009. — 336 с.	**2**
10-13, 4 сем.	Нормы линейных операторов	Подготовка к аудиторным занятиям	Закрепить знания по теме «Нормы линейных операторов», изучив	Окунев Л. Я. Высшая алгебра: учеб. - СПб: Лань, 2009. — 336 с.	**4,5**

			дополнительную литературу		
14-17, 4 сем.	Основы линейной многомерной геометрии	Подготовка к аудиторным занятиям	Закрепить знания по теме «Основы линейной многомерной геометрии», изучив дополнительную литературу	Окунев Л. Я. Высшая алгебра: учеб. - СПб: Лань, 2009. — 336 с.	**4,8**
4 сем.		Подготовка к экзамену			36

6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Студенты получают от преподавателя задание на повторение пройденного материала и самостоятельное изучение дополнительного материала по изучаемым темам лекционного курса. Преподаватель предлагает студентам литературу для самостоятельного изучения, а также выдает дополнительные практические задания (списки задач из учебников и сборников задач согласно списку учебной литературы и интернет-ресурсов по изучаемой дисциплине).

Подготовка к контрольным работам включает самостоятельное изучение необходимого теоретического материала и решение задач по изученной теме. Подготовка к коллоквиумам подразумевает самостоятельное изучение теоретического материала по курсу лекций и с использованием учебной литературы и интернет-ресурсов по изучаемой дисциплине.

6.3. Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов

Контроль освоения компетенций

№ п\п	Вид контроля	Контролируемые темы (разделы)	Компетенции, компоненты которых контролируются
1	контрольная работа, коллоквиум, экзамен	Комплексные числа Матрицы и действия над ними	ОПК-1, ОПК-4
2	контрольная работа, коллоквиум, экзамен	Системы линейных алгебраических уравнений Полная проблема собственных значений	ОПК-1, ОПК-4
3	контрольная работа, коллоквиум, экзамен	Алгебра полиномов Корни полиномов Симметрические и эрмитовы, ортогональные и унитарные матрицы Линейные и квадратичные формы	ОПК-1, ОПК-4
4	контрольная работа, коллоквиум, экзамен	Эрмитовы формы Полиномиальные матрицы и матричные полиномы Группа подстановок	ОПК-1, ОПК-4
5	контрольная работа, коллоквиум, экзамен	Линейные пространства над полем вещественных или комплексных чисел Прямое произведение пространств и пряма сумма подпространств Нормированные пространства	ОПК-1, ОПК-4
6	контрольная работа, коллоквиум, экзамен	Евклидовы пространства Унитарные пространства Линейные операторы и функционалы Полная проблема собственных значений	ОПК-1, ОПК-4
7	контрольная работа, коллоквиум, экзамен	Линейные, билинейные, полуторалинейные функционалы Сопряженные и самосопряженные операторы Линейные отображения в евклидовом пространстве	ОПК-1, ОПК-4
8	контрольная работа, коллоквиум, экзамен	Нормы линейных операторов Основы линейной многомерной геометрии	ОПК-1, ОПК-4

Материалы для проведения текущего контроля знаний и промежуточной аттестации составляют отдельный документ – Фонд оценочных средств по дисциплине «Линейная алгебра».

Демонстрационные варианты оценочных средств для каждого вида контроля доступны в ЭИОС (http://moodle.pnzgu.ru) в разделе Оценочные средства по дисциплине в курсе «Линейная алгебра».

7. Учебно-методическое и материально-техническое обеспечение дисциплины «Линейная алгебра»

а) учебная литература:

1. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. - М.: Лань, 2013.—432 с. (https://e.lanbook.com/book/30198#authors)

2. Окунев Л. Я. Высшая алгебра: учеб. - СПб: Лань, 2009. — 336 с. (https://e.lanbook.com/book/289)
3. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. - М.: ЛБЗ, 2010. — 480 с. (https://e.lanbook.com/book/529#authors)
4. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Задачи по высшей алгебре. – СПб.: Лань, 2008 .— 288 с. (https://e.lanbook.com/book/399#authors)
5. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре: учебное пособие для ВУЗов. - СПб.: Лань, 2007. — 416 с. (https://e.lanbook.com/book/397#authors)

б) Интернет-ресурсы

1. http://biblio.mccme.ru/books/ - Свободно распространяемые издания Московского Центра непрерывного математического образования.
2. http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm - Электронная физико-математическая библиотека EqWorld
3. http://www.mathnet.ru/ - Общероссийский математический портал Math-Net.Ru
4. https://elibrary.ru - Научная электронная библиотека
5. http://lineal.guru.ru – Базовая электронная энциклопедия по линейной алгебре LINEAL

в) Другое материально-техническое обеспечение: компьютеры с доступом в сеть Internet для самостоятельной работы.

Рабочая программа дисциплины С1.О.09 «Линейная алгебра» составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по специальности 01.05.01 «Фундаментальные математика и механика», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от «6» февраля 2018 г. № 16.

Программу составили:

1. Родионова И.А., доцент каф. МСМ Родиол

(Ф.И.О., должность, подпись)

2. ____

(Ф.И.О., должность, подпись)

Настоящая программа не может быть воспроизведена ни в какой форме без предварительного письменного разрешения кафедры-разработчика программы.

Программа одобрена на заседании кафедры МСМ

Протокол № 11 от «29» 06 2019 года

Зав. кафедрой МСМ ____________ Смирнов Ю.Г.

(подпись, Ф.И.О.)

Программа одобрена методической комиссией факультета ВТ

Протокол № 10 от «3» 07 2019 года

Председатель методической комиссии факультета ВТ ____________ Глотова Т.В.

(подпись) (Ф.И.О.)

Сведения о переутверждении программы на очередной учебный год и регистрации изменений

Учеб-ный год	Решение кафедры (№ протокола, дата)	Внесенные изменения	Подпись зав. кафедрой