

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

_____ Фионова Л. Р.

«_____» _____ 201_ г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1. О. 22 Комбинаторика

Направление подготовки 01.03.04 — «Прикладная математика»

Направленность (профиль подготовки) «Математическое моделирование в экономике и технике»

Квалификация выпускника – бакалавр

Форма обучения очная

Пенза, 201_

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Комбинаторика» являются

- получение студентами базовых знаний в области комбинаторики и выработка практических навыков применения этих знаний;
- ознакомление с основными типами комбинаторных задач и методами их решения;
- развитие у студентов логического и алгоритмического мышления.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата

Дисциплина «Комбинаторика» в учебном плане находится в обязательной части блока Б1 "Дисциплины (модули)" и является одной из дисциплин, формирующих профессиональные знания и навыки, характерные для бакалавра по направлению подготовки 01.03.04 «Прикладная математика».

Изучение данной дисциплины базируется на знании дисциплин: Математический анализ, Линейная алгебра и аналитическая геометрия, Современные информационные технологии, Физика, Программирование и практикум на ЭВМ, Теория линейных пространств и операторов, Алгоритмы и алгоритмические языки, Дополнительные главы алгебры, Теория графов и математическая логика.

Основные положения дисциплины должны быть использованы при изучении дисциплин: Теория вероятностей, Дискретная математика, Статистические основы анализа больших данных, Теория игр, Математические модели экономики и техники, Случайные процессы, Компьютерные технологии математических исследований, а также при прохождении: Б2.1 Учебной практики, Б2.2 Производственной практики, Б2.3 Преддипломной практики, при подготовке и защите выпускной квалификационной работы.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «Комбинаторика»

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению:

| Коды компетенции Наименование компетенции | Наименование компетенции | Индикатор достижения компетенции (закрепленный за | В результате освоения дисциплины обучающийся должен: |
|--|--------------------------|--|--|
|--|--------------------------|--|--|

| | | дисциплиной) | |
|-------|--|--|--|
| 1 | 2 | | 3 |
| ОПК-1 | Способен применять знания фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин при решении задач в области естественных наук и инженерной практики | ОПК – 1.4. Применяет оптимальные методы решения задач в инженерной практике, используя фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук | <p>Знать: основные положения и методы численного анализа задач комбинаторики, приложения в теории вероятностей математической статистике</p> <p>Уметь: реализовывать комбинаторные алгоритмы и методы; решать стандартные задачи комбинаторного анализа</p> <p>Владеть: основными методами решения классических и современных комбинаторных задач</p> |

4. Структура и содержание дисциплины «Комбинаторика»

4.1. Структура дисциплины «Комбинаторика»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетные единицы, 72 часа.

| № п/п | Наименование разделов и тем дисциплины (модуля) | Семестр | Недели семестра | Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах) | | | | | | Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Форма промежуточной аттестации (по семестрам) | | | | |
|----------|---|---------|-----------------|---|----------|----------------------|--------------------------|---------------------------|----------------------------------|--|-------------------|-----------------------------|----------------------------|---------------------|
| | | | | Контактная работа | | | | Самостоятельная работа | | Собеседование | Проверка реферата | Проверка контрольной работы | Проверка домашнего задания | |
| | | | | Всего | Лекция | Лабораторные занятия | Др. виды контакт. работы | Всего | Подготовка к аудиторным занятиям | | | | | Реферат, эссе и др. |
| 1. | Раздел 1. Введение | | 1-2 | 4 | 2 | 2 | | 2 | 2 | | 1-2 | | 2 | 2 |
| 1.1. | Тема 1.1. Предмет комбинаторики. Основные понятия. Виды комбинаторных задач. Примеры. Правило суммы и произведения. | | 1-2 | 4 | 2 | 2 | | 2 | 2 | | 1,2 | | 2 | 2 |
| 2. | Раздел 2. Комбинаторные объекты и числа | | 3-6 | 8 | 4 | 4 | | 6,05 | 6,05 | | 3-6 | 4 | 6 | 3-6 |
| 2.1. | Тема 2.1. Размещения, перестановки, сочетания (с повторениями и без повторений), n-мерный куб, разбиения. | | | 8 | 4 | 4 | | 6 | 4 | 2 | 3,4,5,6 | 4 | 6 | 3,4,5,6 |
| 3. | Раздел 3 Комбинаторные тождества | | 7-9 | 6 | 3 | 3 | | 6 | 6 | | 7-9 | 9 | | 7-9 |
| 3.1. | Тема 3.1. Основные комбинаторные | | | 4 | 2 | 2 | | 6 | 4 | 2 | 7,8,9 | 8 | 9 | 7,8,9 |

| | | | | | | | | | | | | | |
|-----|---|--|----------|----------|----------|------|--------------|----------|---|--------------------------|----|-----------|--------------|
| | тождества и способы их доказательства. Треугольник Паскаля, числа Фибоначчи. | | | | | | | | | | | | |
| 4. | Раздел 4 Полиномиальная теорема | | 4 | 2 | 2 | | 6 | 6 | | 10-11 | | 11 | 10-11 |
| 4.1 | Тема 4.1 Бином Ньютона. Полиномиальная формула и её применения. | | 4 | 2 | 2 | | 6 | 6 | | 10,11 | | 11 | 10,11 |
| 5. | Раздел 5. Принцип включения-исключения | | 4 | 2 | 2 | | 6 | 6 | | 12-13 | | 13 | 12-13 |
| 5.1 | Тема 5.1 Формула включения-исключения. Функция Эйлера. Задачи о беспорядках и встречах. Число сюръективных отображений. Обобщение формулы включения-исключения. Числа Стирлинга. Числа Белла. | | 4 | 2 | 2 | | 6 | 4 | 2 | 12, 13 | | 13 | 12, 13 |
| 6 | Раздел 6. Метод производящих функций | | 4 | 2 | 2 | | 6 | 6 | | 14-15 | | | 14-15 |
| 6.1 | Тема 6.1 Понятие производящей функции. Производящие функции для сочетаний с ограниченным и неограниченным числом повторений. Экспоненциальные производящие функции. | | 4 | 2 | 2 | | 6 | 6 | | 14, 15 | 14 | | 14, 15 |
| 7. | Раздел 7 Рекуррентные соотношения | | 4 | 2 | 2 | | 4 | 4 | | 16-17 | | | 16-17 |
| 7.1 | Тема 7.1 Понятие возвратной последовательности. Характеристический многочлен. Однородные и неоднородные линейные рекуррентные соотношения и их решение. | | 4 | 2 | 2 | | 4 | 3 | 1 | 16,17 | | | 16,17 |
| | <i>Др. виды контактной работы</i> | | 1,95 | | | 1,95 | | | | | | | |
| | Общая трудоемкость, в часах | | 35,95 | 17 | 17 | 1,95 | 36,05 | 29.05 | 7 | Промежуточная аттестация | | | |
| | | | | | | | | | | Форма | | Семестр | |
| | | | | | | | | | | Зачёт | | 4 | |

4.2. Содержание дисциплины

| № п/п | Наименование раздела дисциплины | Содержание раздела |
|-------|---------------------------------|--|
| 1 | Введение | Предмет комбинаторики. Основные понятия. Виды комбинаторных задач. Примеры. Правило суммы и произведения. |
| 2 | Комбинаторные объекты и числа | Размещения, перестановки, сочетания (с повторениями и без повторений), n-мерный куб, разбиения. |
| 3 | Комбинаторные тождества | Основные комбинаторные тождества и способы их доказательства. Треугольник Паскаля, числа Фибоначчи. |
| 4 | Полиномиальная теорема | Бином Ньютона. Полиномиальная формула и её применения. |
| 5 | Принцип включения-исключения | Формула включения-исключения. Функция Эйлера. Обобщение формулы включения-исключения. Числа Стирлинга. Числа Белла. |
| 6 | Метод производящих функций | Понятие производящей функции. Производящие функции для сочетаний с ограниченным и неограниченным числом повторений. Экспоненциальные производящие функции. |
| 7 | Рекуррентные соотношения | Понятие возвратной последовательности. Характеристический многочлен. Однородные и неоднородные линейные рекуррентные соотношения и их решение. |

5. Образовательные технологии

В процессе изучения дисциплины «Комбинаторика» предполагается использовать структурно-логические и интеграционные образовательные технологии, реализуемые посредством:

- лекций в виде вводных, текущих, обзорных и заключительно-обобщающих занятий;

- практических занятий с использованием методов «многократного повторения» ; по логике мышления – индуктивные, дедуктивные и репродуктивные.

- организации самостоятельной работы на основе лично-дифференцированного

подхода планирования задания в виде воспроизводящей и частично-поисковой работ.

- организации текущего контроля знаний студентов методами: выполнения домашних заданий, оценки активности на практических и лабораторных занятиях и рейтинговой системы общей оценки знаний студентов.

Занятия, проводимые в интерактивных формах, с использованием интерактивных технологий составляют 30% занятий.

В целях реализации индивидуального подхода к обучению студентов, осуществляющих учебный процесс по собственной траектории в рамках индивидуального рабочего плана, изучение данной дисциплины базируется на следующих возможностях: обеспечение внеаудиторной работы со студентами, в том числе в электронной образовательной среде с использованием соответствующего программного оборудования, дистанционных форм обучения, возможностей Интернет-ресурсов, индивидуальных консультаций и т. д.

Другие виды контактной работы: проведение консультаций, прием экзаменов

**6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.
Оценочные средства для текущего контроля успеваемости,
промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

6.1. План самостоятельной работы студентов

| № нед. | Тема | Вид самостоятельной работы | Задание | Рекомендуемая литература | Количество часов |
|-------------|---|---|------------------------|--------------------------|------------------|
| 1-2 | Виды комбинаторных задач. Примеры. История комбинаторики. | Подготовка к аудиторным лабораторным занятиям | Лабораторная работа №1 | 7 а) – 2 7 б) - 6 | 7 |
| 3-4 | Комбинаторные объекты и числа | Подготовка к аудиторным лабораторным занятиям | Лабораторная работа №2 | 7 а) – 2 7 б) - 6 | 7 |
| 5-10 | Комбинаторные тождества Полиномиальная теорема | Подготовка к | Лабораторная | 7 а) – 2 7 б) - 6 | 14 |

| | | | | | |
|-------|------------------------------|---|---|----------------------|---|
| | Принцип включения-исключения | аудиторным лабораторным занятиям | работа №3 | | |
| 11-12 | Метод производящих функций | Подготовка к аудиторным лабораторным занятиям | Лабораторная работа №4 | 7 а) – 2 7 б) - 6 | 5 |
| 1-17 | Все темы | Подготовка к зачету | Изучение теоретического материала и решение задач | 7 а) – 2 7 б) - 6 | |

Образец типового задания лабораторной работы №1

Задание: Разработать алгоритм и программу сортировки числового массива методом «воздушного пузырька» и методом сортировки вставками. Снять зависимость времени выполнения программы от размера и типа множества.

Образец типового задания лабораторной работы №2

Задание. Разработать и реализовать эффективную формулу для вычисления числа сочетаний

Образец типового задания лабораторной работы №3

Задание. Разработать алгоритм и программу сортировки строк матрицы по убыванию величины сумм элементов их строк.

Образец задания лабораторной работы №4

Генерация комбинаторных объектов. Задание реализовать алгоритм генерации комбинаторных объектов заданного вида.

Образец типового задания лабораторной работы №5

Строки - «сёстры». Разработать и реализовать поиск в матрицах строк - «сестёр», с дальнейшим выводом их на экран.

Демонстрационный вариант контрольной работы №1

1. Все первоклассники пришли в школу с букетами ромашек и астр. В шести из них были астры, в четырех - ромашки; в двух букетах были и те, и другие цветы. Сколько всего было букетов? Какое правило используется при решении задачи?
2. Сколько слов, состоящих из двух гласных и трех согласных можно составить из букв слова "пуговица"?
3. Сколько чисел, больших 5000000, можно составить из цифр 7, 5, 4, 4, 3, 3, 1.
4. В колоде 32 карты. Сколькими способами можно пять карт так, что среди них окажутся две карты из пяти одинакового, а остальные - разных номиналов?
5. Решить уравнение $C_{n-1}^2 = 3$
6. Пользуясь формулой бинома Ньютона, вычислить приближенное значение $0,005^6$ с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

Темы рефератов

1. Комбинаторика древней Греции
2. Комбинаторика стран востока
3. Комбинаторика в биологии. Код ДНК.
4. Комбинаторика эпохи компьютеров
5. Магические квадраты
6. Решето Эратосфена
7. Числа Стирлинга
8. Кролики Фибоначчи
9. Комбинаторика на шахматной доске

Вопросы и задания к зачету

Вопросы

1. Виды комбинаторных задач. Примеры.
2. Правило суммы и произведения.
3. Размещения, перестановки, сочетания (с повторениями и без повторений)
4. Основные комбинаторные тождества и способы их доказательства.
5. Треугольник Паскаля, числа Фибоначчи.
6. Бином Ньютона. Полиномиальная формула и её применения.
7. Формула включения-исключения. Функция Эйлера.
8. Числа Стирлинга. Числа Белла.
9. Понятие производящей функции. Производящие функции для сочетаний с ограниченным и неограниченным числом повторений.
10. Подстановки и их свойства
11. Группы подстановок. Цикловой индекс.
12. Лемма Бернсайда
13. Теорема Пойа.
14. Генерация комбинаторных объектов

Задачи

1. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого – 9 книг. Сколькими способами они могут обменять книгу одного на книгу другого?
2. В корзине лежат 12 яблок и 10 апельсинов. Ваня выбирает из нее яблоко или апельсин, после чего Надя берет и яблоко, и апельсин. В каком случае Надя имеет большую свободу выбора: если Ваня взял яблоко или если он взял апельсин?
3. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ему дают не более трех имен (различных)?
4. Сколькими способами можно переставлять буквы в слове «фацетия» так, чтобы не менялся порядок гласных букв?
5. На вершину горы ведут пять дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее? То же самое при условии, что спуск и подъем происходят по

разным путем Сколькими способами можно переставлять буквы слова «огород» так, чтобы две буквы «о» не стояли рядом.

6. В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

7. 30 человек голосуют по 5 предложениям. Сколькими способами могут распределиться голоса, если каждый голосует за одно предложение и учитывается лишь число голосов, поданных за каждое предложение?

8. Сколькими способами можно составить 6 слов из 32 букв, если в совокупности этих 6 слов каждая буква используется один и только один раз?

9. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Во скольких случаях среди этих карт окажется хотя бы один туз? Во скольких случаях ровно один туз? Во скольких случаях не менее двух тузов? Ровно два туза?

10. Рота состоит из 3 офицеров, 6 сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из одного офицера, двух сержантов и 20 рядовых? Та же задача, если в отряд должен войти командир роты и старший из сержантов.

11. На школьном вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?

12. Известно, что из 100 студентов живописью увлекаются 28, спортом – 42, музыкой – 30, живописью и спортом – 10, живописью и музыкой – 8, спортом и музыкой – 5, живописью, спортом и музыкой – 3. Определить: количество студентов, увлекающихся только спортом; ничем не увлекающихся.

13. В отделе научно-исследовательского института работают несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Шестеро знают английский, шестеро – немецкий, семеро – французский. Четверо знают английский и немецкий, трое – немецкий и французский, двое – французский и английский. Один человек знает все три языка. Сколько человек работают в отделе? Сколько из них знают только английский язык? Только французский?

14. На загородную прогулку поехали 92 человека. Бутерброды с колбасой взяли 47 человек, с сыром – 38 человек, с ветчиной – 42 человека, и с сыром и с колбасой – 28 человек, и с колбасой и с ветчиной – 31 человек, и с сыром и с ветчиной – 26 человек. Все три вида бутербродов взяли 25 человек, а несколько человек вместо бутербродов захватили с собой пирожки. Сколько человек взяли с собой пирожки?

15. Сколько неотрицательных целых чисел, меньших, чем миллион, содержат все цифры 1, 2, 3, 4? Сколько чисел состоит только из этих цифр?

16. Переpletчик должен переpleсти 12 различных книг в красный, зеленый и коричневый переpleты. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть переpleтена хотя бы одна книга?

1.7 Доказать, что

$$1.1 \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2}.$$

$$1.2 \frac{[C_{n+1}^{r+1} - C_n^r] C_{n-1}^{r-1}}{(C_n^r)^2 - C_{n+1}^{r+1} C_{n-1}^{r-1}} = r.$$

6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

- **Подготовка к аудиторным занятиям** проводится посредством изучения курса лекций, дополнительной литературы, а также решения предложенных задач.

- **Подготовка рефератов и докладов** осуществляется с использованием дополнительной литературы.

- **Подготовка к зачету** – изучение курса лекций, упражнения в решении типовых задач, изучение дополнительной литературы.

6.3. Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов

Контроль освоения компетенций

| № п\п | Вид контроля | Контролируемые темы (разделы) | Компетенции, компоненты которых контролируются |
|-------|--|-------------------------------|--|
| 1 | Проведение контрольной работы | Разделы 1,2,3,4,5. | ОПК-1 |
| 2 | Проверка реферата и заслушивание доклада | Разделы 1,2,3,4,5. | ОПК-1 |

Материалы для проведения текущего контроля знаний и промежуточной аттестации составляют отдельный документ – Фонд оценочных средств по дисциплине «Вычислительная математика».

Демонстрационные варианты оценочных средств для каждого вида контроля можно посмотреть <http://moodle.pnzgu.ru> в разделе дисциплины

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины «Комбинаторика»

а) Основная литература

1. Новиков, Федор Александрович.

Дискретная математика для программистов : учебник / Ф. А. Новиков. - 3-е изд. - СПб. : Питер, 2008. - 384 с. : ил. - (Учебник для вузов). - ISBN 978-5-91180-759-7. – аб. 20 экз

2. Шапорев, Сергей Дмитриевич..

Дискретная математика : курс лекций и практических занятий / С. Д. Шапорев. - СПб. : БХВ-Петербург, 2007. - 400 с. : ил. - ISBN 978-5-94157-703-3 – аб. 10 экз

3. Ермолаева Н.Н., Козынченко В.А., Курбатова Г.И.

Практические занятия по алгебре. Элементы теории множеств, теории чисел, комбинаторики. Алгебраические структуры. – СПб.: "Лань", 2014.- 112 с.-ISBN 978-5-8114-1657-8- Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/49469>— Загл. с экрана.

4. Клековкин, Г.А. Введение в перечислительную комбинаторику [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Г.А. Клековкин. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2018. — 228 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/101841>. — Загл. с экрана.

5. В.Д. Колдаев. Структуры и алгоритмы обработки данных: Учебное пособие / В.Д. Колдаев. - М.: ИЦ РИОР: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 296 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование: Бакалавриат). (переплет) ISBN 978-5-369-01264-2, 500 экз.

б) Интернет-ресурсы

в) Программное обеспечение:

1) Microsoft VISUAL STUDIO 2010; Microsoft VISUAL STUDIO 2010 договор № СД-130712001 от 12.07.2013 (подписка с 1 сентября 2013 г. до 31 августа 2017 г.)
продление Microsoft Imagine Standard KDF-00031 (подписка с 1 сентября 2017 г. до 31 августа 2020 г.)

2) ПО «Microsoft Windows» (подписка DreamSpark/Microsoft Imagine Standard);
регистрационный номер

00037FFEBACF8FD7; договор № СД-130712001 от 12.07.2013 (подписка с 1 сентября 2013 г. до 31 августа 2017 г.)Продление Microsoft Imagine Standard KDF-00031 (подписка с 1 сентября 2017 г. до 31 августа 2020 г.)

г) Другое материально-техническое обеспечение

1. Персональные компьютеры

Рабочая программа дисциплины «Вычислительная математика» составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.04 — «Прикладная математика», утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от «10» января 2018 г. №1.

Программу составили:

1. Дмитриева А.А. _____ старший преподаватель кафедры ВиПМ

Настоящая программа не может быть воспроизведена ни в какой форме без предварительного письменного разрешения кафедры-разработчика программы.

Программа одобрена на заседании кафедры «Высшая и прикладная математика»

Протокол № ____ от « ____ » _____ 201__ года

Зав. Кафедрой ВиПМ _____ д.ф.м.н., проф. Бойков И.В.

Программа согласована с заведующим выпускающей кафедрой «Высшая и прикладная математика»

Зав. Кафедрой ВиПМ _____ д.ф.м.н., проф. Бойков И.В.

Программа одобрена методической комиссией ФВТ

Протокол № ____ от « ____ » _____ 201__ года

Председатель методической комиссии ФВТ

к.т.н., доцент

Глотова Т.В.

Сведения о переутверждении программы на очередной учебный год и регистрации изменений

| Учебный год | Решение кафедры (№ протокола, дата) | Внесенные изменения | Подпись зав. кафедрой |
|-------------|--|---------------------|-----------------------|
| | | | |
| | | | |
| | | | |