

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета ФВТ

Фионова Л.Р.
«29» Июня 2016 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

М1.2.9.2 ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Направление подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

Магистерская программа «Математическое моделирование в экономике и

Квалификация (степень) выпускника – *магистр*

Форма обучения очная

Пенза, 2016

Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Вариационное исчисление и вариационные методы» являются

- изучение основных принципов и методов вариационного исчисления;
- развитие навыков численного решения основных типов вариационных задач, а также применение этих навыков для исследования различных социальных, экономических, физических процессов и явлений и интерпретации полученных результатов.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП магистратуры

Дисциплина «Вариационное исчисление и вариационные методы» в учебном плане находится в вариативной части профессионального блока дисциплин и является одной из дисциплин, формирующих профессиональные знания и навыки, характерные для магистра по направлению подготовки «Прикладная математика и информатика».

Изучение дисциплины базируется на знаниях студентами следующих курсов учебного плана бакалавриата по направлению 01.03.04 «Прикладная математика»: «Математический анализ», «Асимптотический анализ», «Прикладной функциональный анализ», «Граничные интегральные уравнения», «Нелинейные уравнения математической физики», «Математическое моделирование».

Дисциплина служит основой для выполнения «Учебной практики».

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «Вариационное исчисление и вариационные методы»

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению:

Коды компетенции	Наименование компетенции	Структурные элементы компетенции (в результате освоения дисциплины обучающийся должен знать, уметь, владеть)
1	2	3
ПСК-2	способность интерпретировать математическую модель, построенную для одной предметной области, как математическую модель для других предметных областей.	Знать: основные понятия вариационного исчисления, определения, утверждения и доказательства основных утверждений
		Уметь: решать вариационные задачи, применять знания свойств функционалов и их экстремалей в других областях математики, таких как, например, методы математической физики.
		Владеть: основными методами исследования функционалов.
ПСК-1	способность строить матема-	Знать: основные понятия вариационного ис-

	<p>тические модели анализа и прогноза экономических, технологических и экологических процессов, в том числе природных и техногенных катаклизмов, разрабатывать для них численные методы и комплексы программ, проводить имитационное моделирование и вырабатывать рекомендации</p>	<p>числения, определения, утверждения и доказательства основных утверждений</p> <p>Уметь: решать вариационные задачи, применять знания свойств функционалов и их экстремалей в других областях математики, таких как, например, методы математической физики.</p> <p>Владеть: основными методами исследования функционалов.</p>
ОПК-4	<p>Способность использовать и применять углубленные знания в области прикладной математики и информатики</p>	<p>Знать: основные понятия вариационного исчисления, определения, утверждения и доказательства основных утверждений</p> <p>Уметь: решать вариационные задачи, применять знания свойств функционалов и их экстремалей в других областях математики, таких как, например, методы математической физики.</p> <p>Владеть: основными методами исследования функционалов.</p>

4. Структура и содержание дисциплины «Вариационное исчисление и вариационные методы»

4.1. Структура дисциплины «Вариационное исчисление и вариационные методы»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы, 108 часов.

№ п/п	Наименование разделов и тем дисциплины (модуля)	Семестр	Недели семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)									Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра)							
				Аудиторная работа				Самостоятельная работа					Собеседование по лабораторным работам	Коллоквиум	Проверка тестов	Проверка контрольн. работ	Проверка реферата	Проверка эссе и иных творческих работ	курсовая работа (проект)	др.
				Всего	Лекция	Практические занятия	Лабораторные занятия	Всего	Подготовка к аудиторным занятиям	Реферат, эссе и др.	Курсовая работа (проект)	Подготовка к зачету								
1.	Раздел 1. Введение и основные положения.	4	1-3	12	6	3	3	24	16			8								
1.1.	Тема 1.1. Основы теории линейных операторов в нормированных пространствах. Понятие ограниченного, вполне непрерывного операторов, норма оператора.	4	1	4	2	1	1	8	4			4	3							
1.2	Тема 1.2. Функционал. Экстремаль функционала.	4	2	4	2	1	1	8	8				3							
1.3	Тема 1.3. Уравнение Эйлера. Его разрешимость.	4	3	4	2	1	1	8	4			4	3							
2.	Раздел 2. Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления задачи.	4	4-5	8	4	2	2	16	8			8	5							
2.1.	Тема 2.1. Достаточные условия экс-	4	4	4	2	1	1	8	4			4	5							

	тремума функционала, условный экстремум. Функционалы, зависящие от двух и более независимых переменных.																		
2.2.	Тема 2.2. Функционалы, содержащие старшие производные. Функционалы, зависящие от нескольких функций одного независимого аргумента.	4	5	4	2	1	1	8	4			4	5						
3.	Раздел 3. Приложения вариационных методов.	4	6-9	16	8	4	4	32	16			16	9						
3.1.	Тема 3.1. Вариационные принципы механики.	4	6	2	1	1		6	3			3	9						
3.2.	Тема 3.2. Приложение вариационных принципов к некоторым задачам математической физики.	4	6	2	1	1		6	3			3	9						
3.3	Тема 3.3. Достаточные условия. Разрывные решения.	4	7	2	1		1	4	2			2	9						
3.4	Тема 3.4. Прямые методы вариационного исчисления.	4	7-8	4	2	1	1	6	3			3	9						
3.5	Тема 3.5. Метод Ритца. Метод функций бесконечного множества аргументов.	4	7-8	2	1		1	4	2			2	9						
3.6	Тема 3.6. Метод Эйлера. Примеры применения прямых методов.	4	9	4	2	1	1	6	3			3	9						
	<i>Подготовка курсовой работы</i>																		
	<i>Подготовка к экзамену</i>																		
	Общая трудоемкость, в часах			36	18	9	9	72	40			32	Промежуточная аттестация						
													Форма			Семестр 4			
													зачет						

4.2. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	Основные понятия вариационного исчисления.	Понятие функционала, необходимые и достаточные условия экстремума, условный экстремум, задача с подвижной границей. Задача с закрепленными концами: достаточные условия экстремума. Функция Вейерштрасса, теоремы о достаточных условиях сильного и слабого экстремума в форме Вейерштрасса и Лежандра. Условный экстремум, задача Лагранжа и изопериметрическая задача. Постановки задач, теоремы о необходимых условиях экстремума. Физические примеры. Геодезические линии поверхностей.
2.	Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления задачи	Достаточные условия экстремума функционала, условный экстремум. Функционалы, зависящие от двух и более независимых переменных. Функционалы, содержащие старшие производные. Функционалы, зависящие от нескольких функций одного независимого аргумента.
3.	Приложения вариационных методов.	Вариационные задачи с подвижной границей и со свободным концом. Постановки задач, теоремы о необходимых условиях экстремума. Физические примеры. Разрывные решения. Условия Якоби. Прямые вариационные методы. Общие замечания. Идея прямых методов. Метод Ритца. Метод функций бесконечного множества аргументов. Метод Эйлера. Примеры применения прямых методов.

5. Образовательные технологии

В процессе изучения дисциплины «Вариационное исчисление и вариационные методы» предполагается использовать структурно-логические и интеграционные образовательные технологии, реализуемые посредством:

- лекций в виде вводных, текущих, обзорных и заключительно-обобщающих занятий;
- практических занятий с использованием методов «многократного повторения»; по логике мышления – индуктивные, дедуктивные и репродуктивные.
- лабораторных работ и их защиты в виде собеседования;
- организации самостоятельной работы на основе лично-дифференцированного подхода планирования задания в виде воспроизводящей и частично-поисковой работ.
- организации текущего контроля знаний студентов методами: выполнения домашних заданий, оценки активности на практических занятиях и рейтинговой системы общей оценки знаний студентов.

Занятия, проводимые в интерактивных формах, с использованием интерактивных технологий составляют 30% занятий.

В целях реализации индивидуального подхода к обучению студентов, осуществляющих учебный процесс по собственной траектории в рамках индивидуального рабочего плана, изучение данной дисциплины базируется на следующих возможностях: обеспечение внеаудиторной работы со студентами в том числе в электронной образовательной среде с использованием соответствующего программного оборудования, дистанционных форм обучения, возможностей интернет-ресурсов, индивидуальных консультаций и т.д.

**6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.
Оценочные средства для текущего контроля успеваемости,
промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

6.1. План самостоятельной работы студентов

№ нед.	Тема	Вид самостоятельной работы	Задание	Рекомендуемая литература	Количество часов
1-2	Введение и основные положения. Основные понятия вариационного исчисления.	Подготовка к аудиторным занятиям, изучение дополнительной литературы	Подробное изучение темы 1.1, 1.2., решение задач	П.7. а) 1, стр 1-106; а) 2 стр 21, а) 3 стр. 110-130	16
3-5	Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления задачи	Подготовка к аудиторным занятиям, изучение дополнительной литературы	Подробное изучение тем 2.1., 2.2., 2.3	П.7. а) 1 стр. 100-145; а) 2 стр. 251, а) 3 стр. 74-120	8
6-11	Приложения вариационных методов.	Подготовка к аудиторным занятиям, изучение дополнительной литературы	Подробное изучение тем 3.1.-3.7	П.7. а) 1, стр.203 а) 3, стр.92, а) 3 стр. 210-260	16
1-11	Все темы	Подготовка к экзамену	Изучение теоретического материала и решение задач	П.7	32

6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

- **Подготовка к аудиторным занятиям** проводится посредством изучения курса лекций, дополнительной литературы, подготовки к лабораторным работам, а также решения пред-

ложенных задач.

- **Подготовка к экзамену** – изучение курса лекций, упражнения в решении типовых задач, изучение дополнительной литературы.

6.3. Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов

Контроль освоения компетенций

№ п\п	Вид контроля	Контролируемые темы (разделы)	Компетенции, компоненты которых контролируются
1	Коллоквиум	Разделы 1,2,3.	ОПК-4, ПСК-1,2
2	Собеседование/защита лабораторной работы	Разделы 1,2,3	ОПК-4, ПСК-1,2

Темы лабораторных работ:

1. Метод Ритца минимизации функционала;
2. Метод Эйлера;
3. Вариационные методы в решения краевых задач математической физики.

Образец заданий контрольной работы:

1. Исследовать на экстремум функционал $V[y] = \int_1^2 (x^2 y'^2 + 12y^2 + \sin 3x) dx$ в задаче с закрепленными концами $y(1) = 1, y(2) = 8$.

Достаточные условия проверить с помощью функции Вейерштрасса.

2. Исследовать на экстремум функционал $V[y] = \int_{-1}^1 (y'^3 + y'^2) dx$ в задаче с закрепленными концами $y(-1) = -1, y(1) = 3$.

Достаточные условия проверить в форме Лежандра.

3. Найти минимальное расстояние от прямой $y = -2x - 4$ до параболы $y = x^2 + 1$.

4. Исследовать на экстремум функционал $V[y, z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 + 1) dx$ с условиями $y(0) = 0, y(1) = 2, z(0) = 0, z(1) = 0$ и голономной связью $y + z = 2x^2$

5. Исследовать на экстремум функционал $V[y, z] = \int_0^1 (y' \cdot z') dx$ с условиями

$$\int_0^1 xy dx = 0, \quad \int_0^1 xz dx = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 1.$$

Вопросы к зачету:

1. Понятие функционала, необходимые и достаточные условия экстремума, условный экстремум, задача с подвижной границей. Задача с закрепленными концами: доста-

- точные условия экстремума.
2. Функция Вейерштрасса, теоремы о достаточных условиях сильного и слабого экстремума в форме Вейерштрасса и Лежандра.
 3. Условный экстремум, задача Лагранжа и изопериметрическая задача.
 4. Постановки задач, теоремы о необходимых условиях экстремума. Физические примеры. Геодезические линии поверхностей.
 5. Достаточные условия экстремума функционала, условный экстремум. Функционалы, зависящие от двух и более независимых переменных.
 6. Функционалы, содержащие старшие производные.
 7. Функционалы, зависящие от нескольких функций одного независимого аргумента.
 8. Вариационные задачи с подвижной границей и со свободным концом.
 9. Постановки задач, теоремы о необходимых условиях экстремума. Физические примеры. Разрывные решения. Условия Якоби.
 10. Прямые вариационные методы. Общие замечания. Идея прямых методов.
 11. Метод Ритца.
 12. Метод функций бесконечного множества аргументов.
 13. Метод Эйлера. Примеры применения прямых методов.

Зачет по курсу «**Вариационное исчисление и вариационные методы**» состоит из 2-х частей: 1-я часть зачета – письменная работа на знание определений, формулировок теорем и умение решать простые задачи. 2-я часть зачета – теоретическая. К ней допускаются только студенты, успешно выполнившие первую. Для получения зачета необходимо уметь доказывать утверждения и теоремы, включенные в изучаемый курс.

Образец билета первой части зачета:

1. Сформулировать теорему о необходимом условии экстремума функционала

$$V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad \text{в задаче с закрепленными концами} \quad y(a) = A, \quad y(b) = b.$$

2. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума функционала

$$V[y] = \int_a^{b=B[y]} \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad \text{считая, что левый конец закреплен, а правый – подвижен.}$$

Образец билета второй части зачета:

1. Доказать, что необходимым условием экстремума функционала является равенство нулю его вариации при условии, что вариация существует.
2. Доказать сходимость метода Рунге для функционала интегрального типа, зависящего от первой производной.

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины «Вариационное исчисление и вариационные методы»

1. Основная литература

1.1. Васильева, А.Б. Интегральные уравнения [Электронный ресурс] : учеб. / А.Б. Васильева, Н.А. Тихонов. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 160 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/42>. — Загл. с экрана.

1.2 Интегральные уравнения [Текст] : учеб.пособие / Аделаида Борисовна Васильева, Николай Андреевич Тихонов. - 2-е изд.,стереотип. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 160 с. - 517(075) аб-1, чз2-2. - ISBN 5-9221-0275-3
http://kleopatra.pnzgu.ru/cgi-bin/irbis64r_91/cgiirbis_64.exe?P21DBN=KATL&I21DBN=KATL_PRINT&S21FMT=fullw_print&C21COM=F&Z21MFN=74

1.3.Вариационное исчисление [Текст] : задачи и примеры с подробными решениями:Учеб.пособия / Михаил Леонтьевич Краснов, Григорий Иванович Макаренко, Александр Иванович Киселев. - М. : УРСС, 2002. - 176 с. - (Вся высшая математика в задачах). - 519.3(076) аб-каф.персональные коммуникации-1. - ISBN 5-354-00015-7 :

http://kleopatra.pnzgu.ru/cgi-bin/irbis64r_91/cgiirbis_64.exe?P21DBN=KATL&I21DBN=KATL_PRINT&S21FMT=fullw_print&C21COM=F&Z21MFN=1032

1.4. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах [Текст] / Васильева А. Б. [и др.]. - М. : Физматлит, 2003. - 432 с. : ил. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 10). - 517 аб-8, чз2-2. - ISBN 5-9221-0276-1 http://kleopatra.pnzgu.ru/cgi-bin/irbis64r_91/cgiirbis_64.exe?P21DBN=KATL&I21DBN=KATL_PRINT&S21FMT=fullw_print&C21COM=F&Z21MFN=4810

1.5. Задачи и упражнения по курсу "Интегральные уравнения и вариационное исчисление" : учебно-метод. пособие / Т. В. Елисеева ; Пенз. гос. ун-т. - Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2009. - 32 с. - б.ц

http://kleopatra.pnzgu.ru/cgi-bin/irbis64r_91/cgiirbis_64.exe?P21DBN=KATL&I21DBN=KATL_PRINT&S21FMT=fullw_print&C21COM=F&Z21MFN=12578

6. Дополнительная литература:

2.1. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2009. — 572 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2206>.

2.2. Треногин, В.А. Функциональный анализ [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2002. — 488 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2340>.

2.3. Треногин, В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева. — Электрон.

дан. — Москва : Физматлит, 2005. — 240 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2342>.

2.4. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики [Электронный ресурс] : учеб. / В.С. Владимиров, В.В. Жаринов. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2000. — 400 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2363>. — Загл. с экрана.

2.5. Владимиров, В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В.С. Владимиров, А.А. Вашарин. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2001. — 288 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/2364>. — Загл. с экрана.

8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Лекционные и практические занятия по дисциплине «Вариационное исчисление и вариационные методы» проводятся в лекционных аудиториях университета. Лабораторные работы проводятся в классах, оснащенных персональными компьютерами.

Waterloo Maple Inc. Maple. Maple 2017: Universities or Equivalent Degree Granting Institutions ,

Бессрочный договор № 047-17-44 от 25 декабря 2017 г.

ПО «Microsoft Windows» (подписка DreamSpark/Microsoft Imagine Standard); регистрационный номер 00037FFEBA CF8FD7,

включает в себя:

Microsoft Windows XP, Microsoft Windows 7, Microsoft Windows 8, Microsoft Windows 8.1, Microsoft Windows 10, Microsoft Windows Server 2008, Microsoft Windows Server 2010, Microsoft Windows Server 2012

Microsoft Office Visio 2003, Microsoft Office Visio 2007, Microsoft Office Visio 2010, Microsoft Office Access 2013, Microsoft Office Access 2016

Microsoft Office Access 2003, Microsoft Office Access 2007, Microsoft Office Access 2010, Microsoft Office Access 2012, Microsoft Office Access 2013, Microsoft Office Access 2016

Microsoft Visual Studio 2005, Microsoft Visual Studio 2008, Microsoft Visual Studio 2010, Microsoft Visual Studio 2012, Microsoft Visual Studio 2013, Microsoft Visual Studio 2016

Договор № СД-130712001 от 12.07.2013 (подписка с 1 сентября 2013 г. до 31 августа 2017 г.)

Продление Microsoft Imagine Standard KDF-00031 (подписка с 1 сентября 2017 г. до 31 августа 2020 г.)

Рабочая программа дисциплины «Вариационное исчисление и вариационные методы» составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»

Программу составил:

1. Тында А.Н. _____ к.ф.-м.н., доцент

Настоящая программа не может быть воспроизведена ни в какой форме без предварительного письменного разрешения кафедры-разработчика программы.

Программа одобрена на заседании кафедры «Высшая и прикладная математика»

Протокол № 11.1 от «20» июня 2016 года

/ Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор



Бойков И.В.

Программа согласована с заведующим выпускающей кафедрой «Высшая и прикладная математика»

Протокол № 11.1 от «20» июня 2016 года

/ Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор



Бойков И.В.

Программа одобрена методической комиссией ФВТ

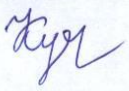
Протокол № 6^а от «29» 06 2016 года

Председатель методической комиссии ФВТ
к.т.н., профессор



Коннов Н.Н.

Сведения о переутверждении программы на очередной учебный год и регистрации изменений

Учебный год	Решение кафедры (№ протокола, дата, /подпись зав. кафедрой)	Внесенные изменения	Номера листов (страниц)		
			заменен- ных	новых	аннулированных
2017- 2018	№1, 04.09.2017 	Обновлен список литературы			

