

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ



УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета

Л. Р. Фионова

(Фамилия, инициалы)

июль 2015г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.2.16 Вариационное исчисление**

Направление подготовки 01.03.04 — «Прикладная математика»

Профиль подготовки «Математическое моделирование в экономике и технике»

Квалификация (степень) выпускника – *бакалавр*

Форма обучения очная

Пенза, 2015

## 1. Цели освоения дисциплины

- изучение основ вариационного исчисления; приобретение навыков применения вариационных методов к решению задач, возникающих при моделировании процессов и явлений, изучаемых естественными науками, физико-техническими и инженерно-физическими дисциплинами, экологией и экономикой;
- формирование у обучаемых математических знаний для успешного овладения общенаучными и общеинженерными дисциплинами на необходимом научном уровне.

## 2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата

Дисциплина «Вариационное исчисление» в учебном плане находится в вариативной части дисциплин Б1.2, и является одной из дисциплин, формирующих профессиональные знания и навыки, характерные для бакалавра по направлению подготовки 01.03.04 «Прикладная математика». Изучение дисциплины базируется на знаниях студентами курсов «Математический анализ», «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Теория функций комплексного переменного», «Теория графов и математическая логика», «Дифференциальные уравнения», «Теория вероятностей, математическая статистика и теория случайных процессов», «Уравнения математической физики», «Методы оптимизации», «Физика», «Исследование операций», «Теория функций и элементы функционального анализа», «Дополнительные главы алгебры», «Нелинейные уравнения математической физики», «Комбинаторика», «Теория возмущений», «Асимптотический анализ», «Основы экономической синергетики», «Теория приближения», «Конструктивные средства математики», «Теория колебаний», «Теория игр», «Прикладной функциональный анализ», «Итерационные методы», «Квадратурные и кубатурные формулы», «Дифференциальная геометрия и топология», «Теория массового обслуживания», «Граничные интегральные уравнения», «Элементы финансовой математики», «Элементы актуарной математики», «Практика по получению первичных профессиональных умений и навыков, в том числе первичных умений и навыков научно-исследовательской деятельности», «Научно-исследовательская работа», «Практика по получению профессиональных умений и опыта профессиональной деятельности».

Основные положения дисциплины должны быть использованы при прохождении преддипломной практики.

## 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «Вариационное исчисление»

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению:

Коды компетенции	Наименование компетенции	Структурные элементы компетенции (в результате освоения дисциплины обучающийся должен знать, уметь, владеть)
1	2	3
ПК-9	Способность выявить естественнаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, готовность использовать для их решения соответствующий естественнаучный аппарат.	Знать: основные понятия и методы вариационного исчисления.
		Уметь: решать вариационные задачи с закрепленными и подвижными границами.
		Владеть: навыками применения вариационных методов к решению интегральных и дифференциальных уравнений.

ПК-12	Способность самостоятельно изучать новые разделы фундаментальных наук	Знать: особенности постановки корректных и некорректных задач; метод регуляризации А.Н. Тихонова решения некорректно поставленных задач.
		Уметь: применять полученные знания при выполнении заданий производственной практики.
		Владеть: навыками применения вариационных методов к задачам, возникающим при моделировании физических и экономических процессов.

#### 4. Структура и содержание дисциплины «Вариационное исчисление»

##### 4.1. Структура дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 2 зачетных единиц, 72 часа.

№ п/п	Наименование разделов и тем дисциплины (модуля)	Семестр	Недели семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)									Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра)							
				Аудиторная работа				Самостоятельная работа					Собеседование	Коллоквиум	Проверка тестов	Проверка контролльн. работ	Проверка реферата	Проверка эссе и иных творческих работ	курсовая работа (проект)	др.
				Всего	Лекция	Практические занятия	Лабораторные занятия	Всего	Подготовка к аудиторным занятиям	Реферат, эссе и др.	Курсовая работа (проект)	Подготовка к зачету								
1	<b>Раздел 1. Функционалы</b>	8		<b>8</b>	<b>4</b>	<b>4</b>		<b>6</b>	<b>5</b>			<b>1</b>								
1.1	Тема 1.1. Понятие функционала. Функциональные пространства. Непрерывность.		1-4	8	4	4			5											
2	<b>Раздел 2. Вариационные задачи</b>	8		<b>20</b>	<b>10</b>	<b>10</b>		<b>20</b>	<b>18</b>			<b>2</b>								
2.1	Тема 2.1. Первая вариация функционала. Необходимое условие экстремума. Основная лемма вариационного исчисления.		5-6	4	2	2			3											
2.2	Тема 2.2. Уравнение Эйлера. Вариационная задача с закрепленными границами.		7-8	4	2	2			3				8							
2.3	Тема 2.3. Поле экстремалей. Функция Вейерштрасса. Достаточные условия экстремума.		9-10	4	2	2			4											

2.4	Тема 2.4. Задачи с подвижной границей. Условия трансверсальности.		11-12	4	2	2			4										
2.5	Тема 2.5. Изопериметрическая задача и задача Лагранжа (постановки задач, необходимое условие экстремума). Задачи на условный экстремум.		13-14	4	2	2			4						14				
3	<b>Раздел 3. Некорректные задачи</b>	8		<b>8</b>	<b>4</b>	<b>4</b>		<b>10</b>	<b>8</b>			<b>2</b>							
3.1	Тема 3.1. Понятие о корректно и некорректно поставленных задачах.		15-16	4	2	2			4										
3.2	Тема 3.2. Метод А.Н. Тихонова регуляризации решения интегральных уравнений.		17-18	4	2	2			4						17				
	<i>Курсовая работа (проект)</i>																		
	<i>Подготовка к экзамену</i>																		
	Общая трудоемкость, в часах			36	18	18		36	31			5	Промежуточная аттестация						
													Форма	Семестр					
													Зачет	8					
													Экзамен						

## 4.2. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1.	Функционалы	Понятие функционала. Функциональные пространства. Непрерывность.
2.	Вариационные задачи	Первая вариация функционала. Необходимое условие экстремума. Вариационная задача с закрепленными границами. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Поле экстремалей. Функция Вейерштрасса. Достаточные условия экстремума. Задачи на условный экстремум. Изопериметрическая задача и задача Лагранжа (постановки задач, необходимое условие экстремума). Задачи с подвижной границей. Условия трансверсальности.
3.	Некорректные задачи	Понятие о корректно и некорректно поставленных задачах. Метод А.Н. Тихонова регуляризации решения интегральных уравнений.

## 5. Образовательные технологии

В процессе изучения дисциплины «Вариационное исчисление» предполагается использовать структурно-логические и интеграционные образовательные технологии, реализуемые посредством:

- лекций в виде вводных, текущих, обзорных и заключительно-обобщающих занятий;

- практических занятий с использованием методов «многократного повторения»; по логике мышления – индуктивные, дедуктивные и репродуктивные.

- организации самостоятельной работы на основе личностно-дифференцированного подхода планирования задания в виде воспроизводящей и частично-поисковой работ.

- организации текущего контроля знаний студентов методами: выполнения домашних заданий, оценки активности на практических занятиях и рейтинговой системы общей оценки знаний студентов.

Занятия, проводимые в интерактивных формах, с использованием интерактивных технологий составляют 30% занятий.

В целях реализации индивидуального подхода к обучению студентов, осуществляющих учебный процесс по собственной траектории в рамках индивидуального рабочего плана, изучение данной дисциплины базируется на следующих возможностях: обеспечение внеаудиторной работы со студентами в том числе в электронной образовательной среде с использованием соответствующего программного оборудования, дистанционных форм обучения, возможностей интернет - ресурсов, индивидуальных консультаций и т.д.

**6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.  
Оценочные средства для текущего контроля успеваемости,  
промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

**6.1. План самостоятельной работы студентов**

№ нед.	Наименование раздела дисциплины	Вид самостоятельной работы	Задание	Рекомендуемая литература	Количество часов
1-2	Понятие функционала. Функциональные пространства. Непрерывность.	Подготовка к аудиторным занятиям	Изучить материал по указанной теме	[1], раздел 1, §1. [2], раздел 1, §1, №5,6.	5
3-4	Первая вариация функционала. Необходимое условие экстремума. Основная лемма вариационного исчисления.	Подготовка к аудиторным занятиям	Изучить материал по указанной теме	[1], раздел 1, §2. [2], раздел 1, §2, №10.	3
5-6	Уравнение Эйлера. Вариационная задача с закрепленными границами.	Подготовка к аудиторным занятиям	Изучить материал по указанной теме	[1], раздел 1, §3. [2], раздел 1, §3, №24,25.	3
7-8	Поле экстремалей. Функция Вейерштрасса. Достаточные условия экстремума.	Подготовка к аудиторным занятиям	Изучить материал по указанной теме	[1], раздел 1, §4. [2], раздел 1, §3, №26,27.	4
9-10	Задачи с подвижной границей. Условия трансверсальности.	Подготовка к аудиторным занятиям	Изучить материал по указанной теме	[1], раздел 1, §6. [2], раздел 1, §4, №32.	4
11-12	Изопериметрическая задача и задача Лагранжа (постановки задач, необходимое условие экстремума). Задачи на условный экстремум.	Подготовка к аудиторным занятиям	Изучить материал по указанной теме	[1], раздел 1, §7. Приложение 1, стр. 4, № 14-17.	4
13-14	Понятие о корректно и некорректно поставленных задачах.	Подготовка к аудиторным занятиям	Изучить материал по указанной теме	[1], раздел 4, §8. Приложение 1, стр. 4, № 4,5.	4
15-16	Метод А.Н. Тихонова регуляризации решения интегральных уравнений.	Подготовка к аудиторным занятиям	Изучить материал по указанной теме	Приложение 1, стр. 4, № 4,5.	4

## 6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

- **Подготовка к аудиторным занятиям** проводится посредством изучения курса лекций, дополнительной литературы, а также решения предложенных задач.
- **Подготовка рефератов и докладов** осуществляется с использованием дополнительной литературы.
- **Подготовка к зачету** – изучение курса лекций, упражнения в решении типовых задач, изучение дополнительной литературы.

## 6.3. Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов

### *Контроль освоения компетенций*

№ п\п	Вид контроля	Контролируемые темы (разделы)	Компетенции, компоненты которых контролируются
1	Контрольная работа Вопросы зачета	Функционалы	ПК-9, ПК-12
2	Контрольная работа Вопросы зачета	Вариационные задачи	ПК-9, ПК-12
3	Контрольная работа Вопросы зачета	Некорректные задачи	ПК-9, ПК-12

### *Демонстрационный вариант контрольной работы №1*

1. Найти расстояние между функциями  $y = xe^{-x}$  и  $y = 0$  в классе  $C[0,2]$ .
2. Найти приращение функционала  $J[y] = \int_0^3 y^2 y' dx$ , если  $y(x) = x^2$ ,  $y_1(x) = x^3$ .
3. Найти вариацию функционала  $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} yy' dx$ , если  $y(x), \delta y \in C^1[x_0, x_1]$ .

### *Демонстрационный вариант контрольной работы №2*

1. Исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 - y^2) dx; \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

2. Найти функцию, на которой может достигаться экстремум функционала

$$J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y^2 - y'^2) dx; \quad y(0) = 0,$$

а другая граничная точка может скользить по прямой  $x = \frac{\pi}{4}$ .



*Демонстрационный вариант контрольной работы №3*

1. Решить интегральное уравнение с разностным ядром

$$u(x) = 29 + 6x + \int_0^x (6x - 6t + 5)u(t)dt.$$

2. Составить интегральное уравнение ретроспективной задачи теплопроводности.

*Примерный перечень вопросов и заданий к зачету*

1. Функциональные пространства.
2. Понятие функционала. Непрерывность. Первая вариация функционала.
3. Необходимое условие экстремума. Вариационная задача с закрепленными границами. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.
4. Поле экстремалей. Функция Вейерштрасса. Достаточные условия экстремума.
5. Задачи на условный экстремум. Изопериметрическая задача и задача Лагранжа (постановки задач, необходимое условие экстремума).
6. Задачи с подвижной границей. Условия трансверсальности.
7. Понятие о корректно и некорректно поставленных задачах.
8. Метод А.Н. Тихонова регуляризации решения интегральных уравнений.

9. Вычислить функционал  $J[y] = \int_0^1 [y(x)]^2 dx$ , если  $y_1(x) = x$ ,  $y_2(x) = e^x$ ,

$$y_3(x) = \sqrt{1 + x^2}.$$

10. Найти расстояние между функциями  $y = x^2$  и  $y = x$  в классе  $C[0,1]$ .

11. Найти приращение и вариацию функционала  $J[y] = \int_1^e (yy' + xy'^2)dx$ , если  $y = \ln x$ ,

$$\delta y = \frac{\alpha(x-1)}{e-1}.$$

12. Исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int_0^1 (y'^2 + 12xy)dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

13. Найти кривую, на которой может достигаться экстремум функционала

$$J[y] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} dx, \quad y(0) = 0,$$

если вторая граничная точка  $(x_1, y_1)$  может перемещаться по окружности

$$(x - 9)^2 + y^2 = 9.$$

14. Найти условие трансверсальности для функционалов вида

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} A(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

15. Решить интегральные уравнения с разностным ядром.

$$u(x) = x + \int_0^x (t - x)u(t)dt.$$

## 7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины «Вариационное исчисление»

### а) основная литература

1. Елисеева Т. В. Интегральные уравнения и вариационное исчисление: учебное пособие. - Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2008. - 104 с. 31 экз.

[http://kleopatra.pnzgu.ru/cgi-bin/irbis64r\\_91/cgiirbis\\_64.exe?P21DBN=KATL&I21DBN=KATL\\_PRINT&S21FMT=full\\_w\\_print&C21COM=F&Z21MFN=9796](http://kleopatra.pnzgu.ru/cgi-bin/irbis64r_91/cgiirbis_64.exe?P21DBN=KATL&I21DBN=KATL_PRINT&S21FMT=full_w_print&C21COM=F&Z21MFN=9796)

2. Елисеева Т. В. Задачи и упражнения по курсу "Интегральные уравнения и вариационное исчисление": учебно-метод. пособие. - Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2009. - 32 с. 19 экз.

[http://kleopatra.pnzgu.ru/cgi-bin/irbis64r\\_91/cgiirbis\\_64.exe?P21DBN=KATL&I21DBN=KATL\\_PRINT&S21FMT=full\\_w\\_print&C21COM=F&Z21MFN=12578](http://kleopatra.pnzgu.ru/cgi-bin/irbis64r_91/cgiirbis_64.exe?P21DBN=KATL&I21DBN=KATL_PRINT&S21FMT=full_w_print&C21COM=F&Z21MFN=12578)

3. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах/ Васильева А. Б. [и др.]. - М.: Физматлит, 2003. - 432 с. 10 экз.

[http://kleopatra.pnzgu.ru/cgi-bin/irbis64r\\_91/cgiirbis\\_64.exe?P21DBN=KATL&I21DBN=KATL\\_PRINT&S21FMT=full\\_w\\_print&C21COM=F&Z21MFN=4810](http://kleopatra.pnzgu.ru/cgi-bin/irbis64r_91/cgiirbis_64.exe?P21DBN=KATL&I21DBN=KATL_PRINT&S21FMT=full_w_print&C21COM=F&Z21MFN=4810)

### б) дополнительная литература

1. Гюнтер Н.М. Курс вариационного исчисления [Электронный ресурс]: учебное пособие. — СПб.: Лань, 2009. — 309 с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=119](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=119)
2. Пантелеев, А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. — СПб.: Лань, 2015. — 512 с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=67460](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=67460)

## 8. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Занятия по дисциплине «Вариационное исчисление» проводятся в лекционных аудиториях университета.

Рабочая программа дисциплины «Вариационное исчисление» составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.04 — «Прикладная математика».

Программу составили:

Елисеева Т. В., доцент кафедры «ВиПМ»

  
(Ф.И.О., должность, подпись)


**Настоящая программа не может быть воспроизведена ни в какой форме без предварительного письменного разрешения кафедры-разработчика программы.**

Программа одобрена на заседании кафедры «Высшая и прикладная математика»

Протокол № 7.1

от « 29 » 05 2015 года


Зав. кафедрой «ВиПМ»

  
И. В. Бойков  
(подпись, Ф.И.О.)

Программа согласована с заведующим выпускающей кафедрой

«Высшая и прикладная математика»

(название кафедры)

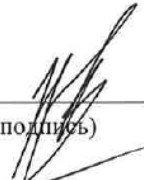
  
И. В. Бойков  
(подпись, Ф.И.О., дата)

Программа одобрена методической комиссией факультета вычислительной техники

Протокол № 6

от « 15 » июня 2015 года

Председатель методической комиссии  
факультета вычислительной техники

  
(подпись)

Н. Н. Коннов  
(Ф.И.О.)

Сведения о переутверждении программы на очередной учебный год  
и регистрации изменений

Учебный год	Решение кафедры (№ протокола, дата, подпись зав. кафедрой)	Внесенные изменения	Номера листов (страниц)		
			заменен- ных	новых	аннулир- ванных
16/17	<i>[подпись]</i> №1 от 19.09.16	Список литературы, МТО			
17/18	<i>[подпись]</i> №1 от 4.09.17	Список литературы, МТО			